Řešené příklady z Matematiky III.

František Mošna

17. října 2007

Obsah:

1. Ortogonální doplňky, ortogonalizace

Nechť U je podprostor vektorového prostoru V. Ortogonální doplněk $U^\perp$ obsahuje všechny vektory, které jsou kolmé ke každému vektoru z U, neboli

$$\forall \vec{v} \in U^\perp \quad \forall \vec{u} \in U \quad \vec{u} \perp \vec{v} \quad \text{což lze vyjádřit pomocí skalárního součinu } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \ .$$

Ortogonální doplněk $U^\perp$ k podprostoru $U = \langle \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k \rangle$ tedy hledáme jako řešení homogenní soustavy rovnic

$$\left(\begin{array}{c|c} \vec{u}_1 & 0 \\ \ldots & \vdots \\ \vec{u}_k & 0 \end{array} \right) ,$$

nuly na pravé straně při výpočtu zpravidla vynecháváme.

Připomeňme také vztah

$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V \ .$$

Příklad 1.1:
Zjistěte ortogonální doplněk

$$\langle (1, -3, 2), (2, 1, 5) \rangle^\perp \ .$$

řešení:
Hledáme vektor (x, y, z), jehož skalární součin se zadanými vektory roven nule. Budeme tedy řešit (úpravou na Gaussův tvar pomocí elementárních úprav) homogenní soustavu rovnic zadanou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Odtud dostáváme

$$z = \alpha \in \mathbb{R}, \qquad 7y + z = 0 \ \Rightarrow \ y = -\frac{1}{7}\alpha \ , \qquad x + \frac{3}{7}\alpha + 2\alpha = 0 \ \Rightarrow \ x = -\frac{17}{7}\alpha$$

neboli

$$(x, y, z) = \alpha \left(-\frac{17}{7}, -\frac{1}{7}, 1 \right) = \tilde{\alpha}(17, 1, -7) \ .$$

V dalších příkladech budeme nuly na pravé straně soustavy vynechávat a upravovat na výhodnější tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & 17 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Odtud již snadno zjistíme, že vektor $(x, 1, -7)$ jistě vyhovuje druhé rovnici. Dosadíme-li ho do první rovnice, dostaneme $7x + 17 \cdot (-7) = 0$ a $x = 17$.

Hledaný ortogonální doplněk je tedy lineární obal

$$\langle (17, 1, -7) \rangle \ .$$

Příklad 1.2:
Zjistěte ortogonální doplněk

$$\langle (1, 2, 1, 1), (3, 1, 1, 1) \rangle^\perp \ .$$

řešení:
Hledáme vektor (x, y, z, t), jehož skalární součin se zadanými vektory roven nule. Budeme řešit soustavu rovnic zadanou maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Odtud dostáváme

$$(x,y,z,t)=\alpha(1,2,0,-5)+\beta(1,2,-5,0)\ .$$

Hledaný ortogonální doplněk je lineární obal

$$\langle(1,2,0,-5),(1,2,-5,0)\rangle\ .$$

Příklad 1.3:
Zjistěte ortogonální doplněk

$$\langle(1,2,1,1),(3,1,1,1),(3,1,0,2)\rangle^{\perp}\ .$$

řešení:
Opět hledáme vektor (x,y,z,t), jehož skalární součin se zadanými vektory roven nule. Budeme řešit soustavu rovnic zadanou maticí

$$\begin{pmatrix}1&2&1&1\\3&1&1&1\\3&1&0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&5&2&2\\0&5&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&1\\0&5&2&2\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&2\\0&5&0&4\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}5&0&0&2\\0&5&0&4\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

Odtud dostáváme

$$(x,y,z,t)=\alpha(2,4,-5,-5)\ .$$

Hledaný ortogonální doplněk je lineární obal

$$\langle(2,4,-5,-5)\rangle\ .$$

V následujících příkladech máme ortogonalizovat skupinu vektorů $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3,\dots$. Užíváme vzorce

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1&=\vec{u}_1\ ,\\
\vec{v}_2&=\vec{u}_2-\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{u}_2}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1\qquad\text{(nebo násobek)}\ ,\\
\vec{v}_3&=\vec{u}_3-\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{u}_3}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1-\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_3}{|\vec{v}_2|^2}\vec{v}_2\qquad\text{(nebo násobek), a tak dále}
\end{aligned}$$

Příklad 1.4:
Nalezněte ortogonální bázi prostoru

$$\langle(1,1,1),(1,0,1),(1,2,1)\rangle\ .$$

řešení:
Označíme vektory $\vec{u}_1=(1,1,1),\vec{u}_2=(1,0,1),\vec{u}_3=(1,2,1)$ a užijeme vzorce

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1=\vec{u}_1=(1,1,1)\qquad|\vec{v}_1|^2=3\ ,\\
&\vec{u}_2-\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{u}_2}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1=(1,0,1)-\frac{(1,1,1)\cdot(1,0,1)}{3}(1,1,1)=(1,0,1)-\frac{2}{3}(1,1,1)=(\tfrac{1}{3},-\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3})\\
&\text{vezmeme }\vec{v}_2=(1,-2,1)\qquad|\vec{v}_2|^2=6\ ,\\
&\vec{u}_3-\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{u}_3}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1-\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_3}{|\vec{v}_2|^2}\vec{v}_2=(1,2,1)-\frac{(1,1,1)\cdot(1,2,1)}{3}(1,1,1)-\frac{(1,-2,1)\cdot(1,2,1)}{6}(1,-2,1)=\\
&\qquad=(1,2,1)-\frac{4}{3}(1,1,1)+\frac{1}{3}(1,-2,1)=(0,0,0)\quad vecv_3=(0,0,0)\ .
\end{aligned}$$

Dostáváme ortogonální bázi

$$\vec{v}_1=(1,1,1),\vec{v}_2=(1,-2,1)\ .$$

Příklad 1.5:
Nalezněte ortogonální bázi prostoru

$$\langle (1,-3,1,2),(4,-5,5,3),(3,-8,1,1)\rangle \ .$$

řešení:
Označíme vektory $\vec{u}_1=(1,-3,1,2),\vec{u}_2=(4,-5,5,3),\vec{u}_3=(3,-8,1,1)$ a užijeme uvedené vzorce

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1=\vec{u}_1=(1,-3,1,2) \qquad |\vec{v}_1|^2=15\ ,\\
&\vec{v}_2=\vec{u}_2-\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{u}_2}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1=(4,-5,5,3)-\frac{30}{15}(1,-3,1,2)=(2,1,3,-1) \qquad |\vec{v}_2|=15\ ,\\
&\vec{v}_3=\vec{u}_3-\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{u}_3}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1-\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_3}{|\vec{v}_2|^2}\vec{v}_2=(3,-8,1,1)-\frac{30}{15}(1,-3,1,2)-\frac{0}{15}(2,1,3,-1)=(1,-2,-1,-3)\ .
\end{aligned}$$

Dostáváme ortogonální bázi

$$\vec{v}_1=(1,-3,1,2),\vec{v}_2=(2,1,3,-1),\vec{v}_3=(1,-2,-1,-3)\ .$$

Příklad 1.6:
Nalezněte ortogonální bázi prostoru

$$\langle (1,2,1,1),(3,1,1,1),(-1,3,1,1),(0,3,-1,2)\rangle \ .$$

řešení:
Označíme vektory $\vec{u}_1=(1,2,1,1),\vec{u}_2=(3,1,1,1),\vec{u}_3=(-1,3,1,1),\vec{u}_4=(0,3,-1,2)$ a užijeme vzorce

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1=\vec{u}_1=(1,2,1,1) \qquad |\vec{v}_1|^2=7\ ,\\
&\vec{v}_2=\vec{u}_2-\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{u}_2}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1=(3,1,1,1)-\frac{7}{7}(1,2,1,1)=(2,-1,0,0) \qquad |\vec{v}_2|^2=5\ ,\\
&\vec{v}_3=\vec{u}_3-\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{u}_3}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1-\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_3}{|\vec{v}_2|^2}\vec{v}_2=(-1,3,1,1)-\frac{7}{7}(1,2,1,1)-\frac{-5}{5}(2,-1,0,0)=(0,0,0,0) \qquad \vec{v}_3=(0,0,0,0)\ ,\\
&\vec{u}_4-\frac{\vec{v}_1\cdot\vec{u}_4}{|\vec{v}_1|^2}\vec{v}_1-\frac{\vec{v}_2\cdot\vec{u}_4}{|\vec{v}_2|^2}\vec{v}_2-\frac{\vec{v}_3\cdot\vec{u}_4}{|\vec{v}_3|^2}\vec{v}_3=\\
&\qquad=(0,3,-1,2)-\frac{7}{7}(1,2,1,1)-\frac{-3}{5}(2,-1,0,0)=\frac{1}{5}(1,8,-10,5) \quad \text{vezmeme } \vec{v}_4=(1,8,-10,,5)
\end{aligned}$$

Dostáváme ortogonální bázi

$$\vec{v}_1=(1,2,1,1),\vec{v}_2=(2,-1,0,0),\vec{v}_4=(1,8,-10,5)\ .$$

2. Vzájemná poloha lineálů

O vzájemné poloze lineálů (=afinních prostorů) $K = a + U = a + \langle \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \rangle$ a $L = b + V = b + \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l \rangle$ podává přehled následující tabulka:

	$U \parallel V$	$U \nparallel V$
$K \cap L = \emptyset$	U, V rovnoběžné	U, V mimoběžné
$K \cap L \neq \emptyset$	$U \subset V$ nebo $V \subset U$	U, V různoběžně

Na základě následující soustavy rovnic

$$\left(\vec{u}_1^T, \dots, \vec{u}_k^T \mid -\vec{v}_1^T, \dots, -\vec{v}_l^T \parallel (b-a)^T \right)$$

pak rozhodneme
1. o rovnoběžnosti vektorových podprostorů U a V, neboť

$$U \parallel V \qquad \Longleftrightarrow \qquad \dim(U+V) = \max(\dim U, \dim V) \ ,$$

kde dimenze prostorů zjistíme podle hodností částí matice soustavy

$$\Big(\underbrace{\underbrace{\vec{u}_1^T, \dots, \vec{u}_k^T}_{\text{hod } = \dim U} \mid \underbrace{-\vec{v}_1^T, \dots, -\vec{v}_l^T}_{\text{hod } = \dim V}}_{\text{hod } = \dim(U+V)} \parallel (b-a)^T \Big) \ ,$$

2. o průniku $K \cap L = b + s_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + s_l \cdot \vec{v}_l$ $(= a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + \cdots + t_k \cdot \vec{u}_k$), kde hodnoty parametrů $s_1, \dots, s_l$ (nebo $t_1, \dots, t_k$) zjistíme řešením stejné soustavy

$$\begin{array}{c} \left(\vec{u}_1^T, \dots, \vec{u}_k^T \mid -\vec{v}_1^T, \dots, -\vec{v}_l^T \parallel (b-a)^T \right) \\ t_1 \ \dots \ t_k \qquad s_1 \ \dots \ s_l \qquad\qquad \end{array} .$$

Příklad 2.1:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [3,-1,2] + \langle (1,-2.1) \rangle \\ L =& [-1,3,1] + \langle (-2,0,1) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
V úvodu řešení ukážeme, jak uvedená metoda odpovídá poznatkům ze střední školy.
Hledáme vzájemnou polohu polohu dvou přímek, jejichž vyjádření přepíšeme do parametrických rovnic

$$K: \quad \begin{aligned} x &= \ \ 3 + \ t \\ y &= -1 - 2t \\ \underline{z} &\underline{= \ \ 2 + \ t} \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{a} \qquad L: \quad \begin{aligned} x &= -1 - 2s \\ y &= \ \ 3 \\ \underline{z} &\underline{= \ \ 1 + \ s} \end{aligned} \qquad t \in \mathbb{R} \ .$$

Ze střední školy si pamatujeme, že mezi příslušné rovnice (pro x-ové, y-ové, z-ové souřadnice) položíme znaménko rovnosti a vypočítáme parametry s a t

$$\begin{aligned} 3 + \ t &= -1 - 2s \\ -1 - 2t &= \ \ 3 \\ 2 + \ t &= \ \ 1 + \ s \end{aligned} \qquad .$$

V rovnicích převedeme výrazy s parametrem s na levou stranu a čísla bez parametrů napravo

$$\begin{aligned} t + 2s &= -1 - 3 \\ -2t \qquad &= \ \ 3 + 1 \\ t - \ s &= \ \ 1 - 2 \end{aligned} \qquad .$$

Takto vzniklá matice odpovídá matici (uvedené v úvodu této kapitoly), která pro lineály $K = a+\langle\vec{u}\rangle$ a $L = b+\langle\vec{v}\rangle$ vznikne, když do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektor prvního lineálu ($\vec{u}$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením $b - a$

Vzniklou matici pak řešíme jako soustavu lineárních rovnic pro neznámé t a s převodem na Gaussův (stupňovitý) tvar

$$\left(\vec{u}^T \;\middle|\; -\vec{v}^T \;\middle\|\; (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & 2 & -1-3 \\ -2 & 0 & 3+1 \\ 1 & -1 & 1-2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c||r} 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \\ \underbrace{\underbrace{0}_{1} & \underbrace{0}_{1}}_{2} & 0 \end{array}\right) \end{array} .$$

Nejprve potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle\vec{u}\rangle$ a $V = \langle\vec{v}\rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U + V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 1$, $\dim V = 1$ a $\dim(U + V) = 2$. Protože podmínka $\dim(U + V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Pro zjištění průniku nám stačí druhá neznámá $s = -1$. Průnik $K \cap L$ pak obsahuje právě jeden bod

$$b + s \cdot \vec{v} = [-1, 3, 1] - (-2, 0, 1) = [1, 3, 0] .$$

Pro kontrolu můžeme dopočítat neznámou $t = -2$, průsečík vyjde stejně

$$a + t \cdot \vec{u} = [3, -1, 2] - 2 \cdot (1, -2, 1) = [1, 3, 0] .$$

Lineály K a L jsou tedy různoběžné (neboť $K \cap L \neq \emptyset$ a $U \nparallel V$) a jejich průnik sestává z jednoho bodu $[1, 3, 0]$.

Příklad 2.2:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [3, -1, 2] + \langle(1, -2.1)\rangle \\ L =& [0, 1, 7] + \langle(-2, 0, 1)\rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle\vec{u}\rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [3, -1, 2] \qquad \text{a vektorem } \vec{u} = (1, -2, 1) ,$$

lineál $L = b + \langle\vec{v}\rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [0, 1, 7] \qquad \text{a vektorem } \vec{v} = (-2, 0, 1) .$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektor prvního lineálu ($\vec{u}$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením $b - a$

Vzniklou matici řešíme opět jako soustavu lineárních rovnic pro neznámé t a s převodem na Gaussův (stupňovitý) tvar

$$\left(\vec{u}^T \;\middle|\; -\vec{v}^T \;\middle\|\; (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{r|r||l} 1 & 2 & 0- \quad 3 \\ -2 & 0 & 1-(-1) \\ 1 & -1 & 7- \quad 2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c||r} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ \underbrace{\underbrace{0}_{1} & \underbrace{0}_{1}}_{2} & 5 \end{array}\right) \end{array} .$$

Zaměření lineálů - vektorové prostory $U = \langle \vec{u} \rangle$ a $V = \langle \vec{v} \rangle$ nejsou rovnoběžné, $U \nparallel V$, neboť $\dim U = 1$, $\dim V = 1$ a $\dim(U+V) = 2$ a podmínka $\dim(U+V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí.
Protože soustava nemá řešení (zjistíme podle třetí řádky matice $0 \cdot s = 1$), je průnik lineálů prázdný, $K \cap L = \emptyset$.
Lineály K a L jsou tedy mimoběžné (neboť $K \cap L = \emptyset$ a $U \nparallel V$) a průnik je prázdná množina.

Příklad 2.3:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [3,-1,2] + \langle (1,-2.1), (-1,0,2) \rangle \\ L =& [3,1,-1] + \langle (-3,4,0) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ je popsán

bodem $a = [3,-1,2]$ a dvěma vektory $\vec{u}_1 = (1,-2,1)$ a $\vec{u}_2 = (-1,0,2)$,

lineál $L = b + \langle \vec{v} \rangle$ pak

bodem $b = [3,1,-1]$ a vektorem $\vec{v} = (-3,4,0)$.

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b - a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \;\middle|\; -\vec{v}^T \;\middle\|\; (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ \underbrace{\underbrace{0 \quad 0}_{2} & \underbrace{0}_{1}}_{2} & 0 \end{array}\right) \end{array} .$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ a $V = \langle \vec{v} \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U + V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 1$ a $\dim(U+V) = 2$. Protože podmínka $\dim(U+V) = \max(\dim U, \dim V)$ platí, jsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Soustava se skládá ze dvou rovnic a máme tři neznámé t_1, t_2 a s, můžeme tedy jednu neznámou (například s) považovat za parametr. Průnik $K \cap L$ se pak rovná přímo lineálu L.

Pro kontrolu můžeme dopočítat zbylé neznámé $t_1 = -1 - 2s$ a $t_2 = s - 1$, průsečík vyjde stejně

$$a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_1 = [3,-1,2] + (-1-2s) \cdot (1,-2,1) + (s-1) \cdot (-1,0,2) = [3,1,-1] + s \cdot (-3,4,0)\,.)$$

Lineál L je tedy podprostorem lineálu K (neboť $K \cap L = L \neq \emptyset$ a $U \parallel V$).

Příklad 2.4:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [3,-1,2] + \langle (1,-2.1), (-1,0,2) \rangle \\ L =& [0,1,-2] + \langle (-3,4,0) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [3,-1,2] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{u}_1 = (1,-2,1) \text{ a } \vec{u}_2 = (-1,0,2)\,,$$

lineál $L = b + \langle \vec{v} \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [0,1,-2] \qquad \text{a vektorem } \vec{v} = (-3,4,0)\,.$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečnetním bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b - a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \,\middle|\, -\vec{v}^T \,\middle\|\, (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & 3 & -3 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} t_1 & t_2 & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\quad\quad}_{2}\ \underbrace{\quad}_{1}}_{2} \end{array} .$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů. Neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ a $V = \langle \vec{v} \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U + V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 1$ a $\dim(U + V) = 2$. Protože podmínka $\dim(U + V) = \max(\dim U, \dim V)$ je splněna, jsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Soustava nemá řešení, průnik $K \cap L$ je proto prázdný.
Lineály K a L jsou tedy rovnoběžné (neboť $K \cap L = \emptyset$ a $U \parallel V$) a průnik je prázdná množina.

Příklad 2.5:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [3,-1,2] + \langle (1,-2.1), (-1,0,2) \rangle \\ L =& [0,1,7] + \langle (-3,4,1), (0,-2,3) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [3,-1,2] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{u}_1 = (1,-2,1) \text{ a } \vec{u}_2 = (-1,0,2)\,,$$

lineál $L = b + \langle \vec{v} \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [0,1,7] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{v}_1 = (-3,4,1) \text{ a } \vec{v}_2 = (0,-2,3)\,.$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektory druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}_1$, $-\vec{v}_2$)

- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b-a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \mid -\vec{v}_1^T \quad -\vec{v}_2^T \parallel (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{rr|rr||r} 1 & -1 & 3 & 0 & -3 \\ -2 & 0 & -4 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|rr||r} 1 & -1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & s_1 & s_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr||r} 1 & -1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\qquad\quad}_{2}\ \underbrace{\qquad\quad}_{2}}_{3} \end{array} .$$

Potřebujeme opět zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů. Neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ a $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U+V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 2$ a $\dim(U+V) = 3$. Protože podmínka $\dim(U+V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Matici chápeme jako soustavu lineárních rovnic pro neznámé t_1, t_2, s_1 a s_2. Protože máme tři rovnice a čtyři neznámé, volíme za jednu (třeba poslední) neznámou parametr s. Pro zjištění průniku nám stačí třetí a čtvrtá neznámá $s_1 = -2$ a $s_2 = s$. Průnik $K \cap L$ pak obsahuje body

$$b + s_1 \cdot \vec{v}_1 + s_2 \cdot \vec{v}_2 = [0,1,7] - 2 \cdot (-3,4,1) + s \cdot (0,-2,3) = [6,-7,5] + s \cdot (0,-2,3) .$$

Pro kontrolu můžeme dopočítat zbylé neznámé $t_1 = 3 + s$, $t_2 = s$, průsečík vyjde stejně

$$a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_1 = [6,-7,5] + s \cdot (0,-2,3) .$$

Lineály K a L jsou tedy různoběžné (neboť $K \cap L \neq \emptyset$ a $U \nparallel V$) a průnik sestává z přímky $K \cap L = [6,-7,5] + \langle (0,2,-3) \rangle$.

Příklad 2.6:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K &= [2,-3,-4,1] + \langle (1,-1,2,0), (-1,1,0,1) \rangle \\ L &= [2,1,-1,1] + \langle (1,1,0,2) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [2,-3,-4,1] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{u}_1 = (1,-1,2,0) \text{ a } \vec{u}_2 = (-1,1,0,1) ,$$

lineál $L = b + \langle \vec{v} \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [2,1,-1,1] \qquad \text{a vektorem } \vec{v} = (1,1,0,2) .$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého

lineálu L, tedy $b-a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \mid -\vec{v}^T \parallel (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\qquad\quad}_{2}\ \underbrace{\quad}_{1}}_{3} \end{array} .$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů. Neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ a $V = \langle \vec{v} \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U+V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 1$ a $\dim(U+V) = 3$. Protože podmínka $\dim(U+V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Soustava nemá řešení, průnik $K \cap L$ je tedy prázdný.
Lineály K a L jsou tedy mimoběžné (neboť $K \cap L = \emptyset$ a $U \nparallel V$) a průnik je prázdná množina.

Příklad 2.7:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K &= [1,0,-1,2] + \langle (1,6,-1,1), (0,2,1,1) \rangle \\ L &= [3,-1,0,4] + \langle (-1,1,-1,0) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [1,0,-1,2] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{u}_1 = (1,6,-1,1) \text{ a } \vec{u}_2 = (0,2,1,1)\,,$$

lineál $L = b + \langle \vec{v} \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [3,-1,0,4] \qquad \text{a vektorem } \vec{v} = (-1,1,-1,0)\,.$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b-a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \mid -\vec{v}^T \parallel (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -7 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & -13 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\qquad}_{2}\ \underbrace{\quad}_{1}}_{3} \end{array} .$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů. Neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ a $V = \langle \vec{v} \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U + V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 1$ a $\dim(U + V) = 3$. Protože podmínka $\dim(U + V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Soustava nemá řešení, průnik $K \cap L$ je proto prázdný.
Lineály K a L jsou tedy mimoběžné (neboť $K \cap L = \emptyset$ a $U \nparallel V$) a průnik je prázdná množina.

Příklad 2.8:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [5, 3, -9, 2] + \langle (1, 1, 2, 1), (2, 1, -2, 1) \rangle \\ L =& [7, 2, 10, 4] + \langle (-1, 1, -1, 0) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [5, 3, -9, 2] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{u}_1 = (1, 1, 2, 1) \text{ a } \vec{u}_2 = (2, 1, -2, 1)\,,$$

lineál $L = b + \langle \vec{v} \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [7, 2, 10, 4] \qquad \text{a vektorem } \vec{v} = (-1, 1, -1, 0)\,.$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b - a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \;\middle|\; -\vec{v}^T \;\middle\|\; (b-a)^T \right) = \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 19 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -6 & -1 & 15 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 11 & 33 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\hphantom{0\;0}}_{2}\;\underbrace{\hphantom{0}}_{1}}_{3} \end{array}$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ a $V = \langle \vec{v} \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U + V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 1$ a $\dim(U + V) = 3$. Protože podmínka $\dim(U + V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Pro zjištění průniku nám stačí druhá neznámá $s = 3$. Průnik $K \cap L$ pak obsahuje právě jeden bod

$$b + s \cdot \vec{v} = [7, 2, 10, 4] + 3 \cdot (-1, 1, -1, 0) = [4, 5, 7, 4]\,.$$

Pro kontrolu můžeme dopočítat neznámé $t_1 = 5$ a $t_2 = -3$, průsečík vyjde stejně

$$a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_2 = [5, 3, -9, 2] + 5 \cdot (1, 1, 2, 1) - 3 \cdot (2, 1, -2, 1) = [4, 5, 7, 4]\,.$$

Lineály K a L jsou tedy různoběžné (neboť $K \cap L \neq \emptyset$ a $U \nparallel V$) a jejich průnik sestává z jednoho bodu $[4, 5, 7, 4]$.

Příklad 2.9:

Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$
\begin{aligned}
K =& [2, 1, 2, -1] + \langle (1, 3, -2, 1), (2, 2, 0, -1) \rangle \\
L =& [3, -1, 3, 2] + \langle (1, 7, -6, 4) \rangle
\end{aligned}
$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [2, 1, 2, -1] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{u}_1 = (1, 3, -2, 1) \text{ a } \vec{u}_2 = (2, 2, 0, -1)\,,$$

lineál $L = b + \langle \vec{v} \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [3, -1, 3, 2] \qquad \text{a vektorem } \vec{v} = (1, 7, -6, 4)\,.$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b - a$

$$
\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \;\middle|\; -\vec{v}^T \;\middle\|\; (b-a)^T\right) =
\left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -7 & -2 \\ -2 & 0 & 6 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc|c||c} t_1 & t_2 & s & \end{array} \\
\left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
\underbrace{\underbrace{\hphantom{0\;\;0}}_{2}\;\;\underbrace{\hphantom{-1}}_{1}}_{2}
\end{array}
\,.
$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ a $V = \langle \vec{v} \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U + V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 1$ a $\dim(U + V) = 2$. Protože je podmínka $\dim(U + V) = \max(\dim U, \dim V)$ splněna, jsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Soustava nemá řešení, průnik $K \cap L$ je proto prázdná množina.
Lineály K a L jsou tedy rovnoběžné (neboť $K \cap L = \emptyset$ a $U \parallel V$) a průnik je prázdný.

Příklad 2.10:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$
\begin{aligned}
K =& [2, 3, -2, 2] + \langle (1, -2, 1, -1), (3, 2, -1, 2) \rangle \\
L =& [3, 1, -1, 1] + \langle (-6, 4, -2, 1) \rangle
\end{aligned}
$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [2, 3, -2, 2] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{u}_1 = (1, -2, 1, -1) \text{ a } \vec{u}_2 = (3, 2, -1, 2)\,,$$

lineál $L = b + \langle \vec{v} \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [3, 1, -1, 1] \qquad \text{a vektorem } \vec{v} = (-6, 4, -2, 1)\,.$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého

lineálu L, tedy $b-a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \mid -\vec{v}^T \parallel (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 3 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\qquad\quad}_{2}\;\underbrace{\quad}_{1}}_{2} \end{array} .$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle\vec{u}_1, \vec{u}_2\rangle$ a $V = \langle\vec{v}\rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U+V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 1$ a $\dim(U+V) = 2$. Protože podmínka $\dim(U+V) = \max(\dim U, \dim V)$ platí, jsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Protože soustava se skládá pouze ze dvou rovnic a máme tři neznámé t_1, t_2 a s, můžeme jednu neznámou (například s) považovat za parametr. Průnik $K \cap L$ se pak rovná přímo lineálu L. Pro kontrolu můžeme dopočítat zbylé neznámé $t_1 = 1-3s$ a $t_2 = -s$, průsečík vyjde stejně

$$a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_1 = [2,3,-2,2] + (1-3s)\cdot(1,-2,1,-1) - s\cdot(3,2,-1,2) = [3,1,-1,1] + s\cdot(-6,4,-2,1)\,.$$

Lineál L je tedy podprostorem lineálu K (neboť $K \cap L = L \neq \emptyset$ a $U \parallel V$) a průnik je roven L.

Příklad 2.11:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [2,1,3,4] + \langle(3,1,-1,2),(2,-2,1,-2)\rangle \\ L =& [3,2,3,2] + \langle(3,2,1,-3)\rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle\vec{u}_1, \vec{u}_2\rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [2,1,3,4] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{u}_1 = (3,1,-1,2) \text{ a } \vec{u}_2 = (2,-2,1,-2)\,,$$

lineál $L = b + \langle\vec{v}\rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [3,2,3,2] \qquad \text{a vektorem } \vec{v} = (3,2,1,-3)\,.$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za plnou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b-a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \mid -\vec{v}^T \parallel (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{cc|c||c} 3 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c||c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -21 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 21 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -36 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\qquad\quad}_{2}\;\underbrace{\quad}_{1}}_{3} \end{array} .$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ a $V = \langle \vec{v} \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U + V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 1$ a $\dim(U + V) = 3$. Protože podmínka $\dim(U + V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Soustava nemá řešení, průnik $K \cap L$ je proto prázdný.
Lineály K a L jsou tedy mimoběžné (neboť $K \cap L = \emptyset$ a $U \nparallel V$) a průnik je prázdná množina.

Příklad 2.12:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K &= [2, 3, -1, 5] + \langle (2, -1, 2, 2), (-3, -2, 1, -1) \rangle \\ L &= [3, 3, -4, -4] + \langle (1, 2, -1, 2) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [2, 3, -1, 5] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{u}_1 = (2, -1, 2, 2) \text{ a } \vec{u}_2 = (-3, -2, 1, -1)\,,$$

lineál $L = b + \langle \vec{v} \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [3, 3, -4, -4] \qquad \text{a vektorem } \vec{v} = (1, 2, -1, 2)\,.$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b - a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \;\middle|\; -\vec{v}^T \;\middle\|\; (b - a)^T \right) = \left(\begin{array}{cc|c||c} 2 & -3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & -6 & -9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & 6 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\quad\quad}_{2} \quad \underbrace{\quad}_{1}}_{3} \end{array}\,.$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ a $V = \langle \vec{v} \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U + V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 1$ a $\dim(U + V) = 3$. Protože podmínka $\dim(U + V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Pro zjištění průniku nám stačí druhá neznámá $s = 4$. Průnik $K \cap L$ pak obsahuje právě jeden bod

$$b + s \cdot \vec{v} = [3, 3, -4, -4] + 4 \cdot (1, 2, -1, 2) = [7, 11, -8, 4]\,.$$

Pro kontrolu můžeme dopočítat neznámé $t_1 = -2$ a $t_2 = -3$, průsečík vyjde stejně

$$a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_2 = [2, 3, -1, 5] - 2 \cdot (2, -1, 2, 2) - 3 \cdot (-3, -2, 1, -1) = [7, 11, -8, 4]\,.$$

Lineály K a L jsou tedy různoběžné (neboť $K \cap L \neq \emptyset$ a $U \nparallel V$) a jejich průnik sestává z jednoho bodu $[7, 11, -8, 4]$.

Příklad 2.13:

Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$K = [1,0,1,-1] + \langle (1,6,1,1), (0,2,1,1), (1,-1,1,0) \rangle$$
$$L = [3,-1,2,1] + \langle (2,0,1,-3) \rangle$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$ je popsán

bodem $a = [1,0,1,-1]$ a třemi vektory $\vec{u}_1 = (1,6,1,1)$, $\vec{u}_2 = (0,2,1,1)$ a $\vec{u}_3 = (1,-1,1,0)$,

lineál $L = b + \langle \vec{v} \rangle$ pak

bodem $b = [3,-1,2,1]$ a vektorem $\vec{v} = (2,0,1,-3)$.

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b - a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \quad \vec{u}_3^T \;\middle|\; -\vec{v}^T \;\middle\|\; (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 6 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & 12 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -7 & 12 & -13 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 10 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & -10 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 18 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{3}\;\underbrace{\quad}_{1}}_{4} \end{array}.$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$ a $V = \langle \vec{v} \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U + V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 3$, $\dim V = 1$ a $\dim(U + V) = 4$. Protože podmínka $\dim(U + V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Pro zjištění průniku nám stačí čtvrtá neznámá $s = 1$. Průnik $K \cap L$ obsahuje právě jeden bod

$$b + s \cdot \vec{v} = [3,-1,2,1] + (2,0,1,-3) = [5,-1,3,-2].$$

Pro kontrolu můžeme dopočítat neznámé $t_1 = 1$, $t_2 = -2$ a $t_3 = 3$, průsečík vyjde stejně

$$a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_2 = [1,0,1,-1] + (1,6,1,1) - 2 \cdot (0,2,1,1) + 3 \cdot (1,-1,1,0) = [5,-1,3,-2].$$

Lineály K a L jsou tedy různoběžné (neboť $K \cap L \neq \emptyset$ a $U \nparallel V$) a jejich průnik sestává z jednoho bodu $[5,-1,3,-2]$.

Příklad 2.14:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$K = [2,1,3,0] + \langle (1,8,2,2), (2,5,2,1), (1,1,2,1) \rangle$$
$$L = [2,1,-2,1] + \langle (1,4,5,-1) \rangle$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$ je popsán

bodem $a = [2,1,3,0]$ a třemi vektory $\vec{u}_1 = (1,8,2,2)$, $\vec{u}_2 = (2,5,2,1)$ a $\vec{u}_3 = (1,1,2,1)$, lineál $L = b + \langle \vec{v} \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [2, 1, -2, 1] \qquad \text{a vektorem } \vec{v} = (1, 4, 5, -1)\,.$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b - a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \quad \vec{u}_3^T \mid -\vec{v}^T \parallel (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 8 & 5 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -11 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 11 & 7 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & -41 & -55 \\ 0 & 0 & -2 & 15 & 17 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & t_3 & s \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c||c} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 14 & -41 & -55 \\ 0 & 0 & 0 & 64 & 64 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\qquad\quad}_{3}\ \underbrace{\quad}_{1}}_{4} \end{array}$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$ a $V = \langle \vec{v} \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U + V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 3$, $\dim V = 1$ a $\dim(U + V) = 4$. Protože podmínka $\dim(U + V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Pro zjištění průniku nám stačí čtvrtá neznámá $s = 1$. Průnik $K \cap L$ pak obsahuje právě jeden bod

$$b + s \cdot \vec{v} = [2, 1, -2, 1] + (1, 4, 5, -1) = [3, 5, 3, 0]\,.$$

Pro kontrolu můžeme dopočítat neznámé $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ a $t_3 = -1$, průsečík vyjde stejně

$$a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_2 + t_3 \cdot \vec{u}_3 = [2, 1, 3, 0] + (2, 5, 2, 1) - (1, 1, 2, 1) = [3, 5, 3, 0]\,.$$

Lineály K a L jsou tedy různoběžné (neboť $K \cap L \neq \emptyset$ a $U \nparallel V$) a jejich průnik sestává z jednoho bodu $[3, 5, 3, 0]$.

Příklad 2.15:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [3, 0, 0, 6] + \langle (3, -1, -1, 2), (2, 0, 1, -3) \rangle \\ L =& [1, -2, 8, -3] + \langle (2, 1, -2, 3), (3, -1, 2, 2) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [3, 0, 0, 6] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{u}_1 = (3, -1, -1, 2) \text{ a } \vec{u}_2 = (2, 0, 1, -3)\,,$$

lineál $L = b + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [1, -2, 8, -3] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{v}_1 = (2, 1, -2, 3) \text{ a } \vec{v}_2 = (3, -1, 2, 2)\,.$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektory druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}_1$, $-\vec{v}_2$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého

lineálu L, tedy $b - a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \mid -\vec{v}_1^T \quad -\vec{v}_2^T \parallel (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{cc|cc||c} 3 & 2 & -2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 8 \\ 2 & -3 & -3 & -2 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc||c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & -3 & -2 & -9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc||c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 10 \\ 0 & 2 & -5 & 0 & -8 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc||c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & -11 & 6 & -28 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & 17 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & s_1 & s_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc||c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & -6 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -75 & 75 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\qquad}_{2} \quad \underbrace{\qquad}_{2}}_{4} \end{array} .$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ a $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U + V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 2$ a $\dim(U + V) = 4$. Protože podmínka $\dim(U + V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Pro zjištění průniku potřebujeme třetí a čtvrtou neznámou $s_1 = 2$ a $s_2 = -1$. Průnik $K \cap L$ pak sestává z bodu

$$b + s_1 \cdot \vec{v}_1 + s_2 \cdot \vec{v}_2 = [1, -2, 8, -3] + 2 \cdot (2, 1, -2, 3) - (3, -1, 2, 2) = [2, 1, 2, 1] .$$

Pro kontrolu můžeme dopočítat neznámé $t_1 = -1$ a $t_2 = 1$, průsečík vyjde stejně

$$a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_2 = [3, 0, 0, 6] - (3, -1, -1, 2) + (2, 0, 1, -3) = [2, 1, 2, 1] .$$

Lineály K a L jsou tedy různoběžné (neboť $K \cap L \neq \emptyset$ a $U \not\parallel V$) a jejich průnik sestává z jednoho bodu $[2, 1, 2, 1]$.

Příklad 2.16:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [1, -2, 3, 0] + \langle (3, 0, -1, 2), (2, -3, 0, 1) \rangle \\ L =& [0, 4, 0, -2] + \langle (1, -1, 0, 2), (0, 1, -2, 1) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ je popsán

bodem $a = [1, -2, 3, 0]$ a dvěma vektory $\vec{u}_1 = (3, 0, -1, 2)$ a $\vec{u}_2 = (2, -3, 0, 1)$,

lineál $L = b + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ pak

bodem $b = [0, 4, 0, -2]$ a dvěma vektory $\vec{v}_1 = (1, -1, 0, 2)$ a $\vec{v}_2 = (0, 1, -2, 1)$.

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$)
- za čáru vektory druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}_1$, $-\vec{v}_2$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého

lineálu L, tedy $b-a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \mid -\vec{v}_1^T \quad -\vec{v}_2{}^T \parallel (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{rr|rr||r} 3 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 6 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr||r} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rr|rr||r} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 6 & -10 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr||r} 1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 8 & -18 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} t_1 & t_2 & s_1 & s_2 \end{array} \\ \left(\underbrace{\underbrace{\begin{array}{rr} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}_{2} \;\middle|\; \underbrace{\begin{array}{rr} 0 & -2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{array}}_{2}}_{4} \;\middle\|\; \begin{array}{r} 3 \\ -8 \\ 2 \\ -8 \end{array}\right) \end{array}$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$ a $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U+V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 2$, $\dim V = 2$ a $\dim(U+V) = 4$. Protože podmínka $\dim(U+V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Pro zjištění průniku potřebujeme třetí a čtvrtou neznámou $s_1 = 2$ a $s_2 = -1$. Průnik $K \cap L$ pak obsahuje právě jeden bod

$$b + s_1 \cdot \vec{v}_1 + s_2 \cdot \vec{v}_2 = [0,4,0,-2] + 2 \cdot (1,-1,0,2) - (0,1,-2,1) = [2,1,2,1] \,.$$

Pro kontrolu můžeme dopočítat neznámé $t_1 = 1$ a $t_2 = -1$, průsečík vyjde stejně

$$a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_2 = [1,-2,3,0] + (3,0,-1,2) - (2,-3,0,1) = [2,1,2,1] \,.$$

Lineály K a L jsou tedy různoběžné (neboť $K \cap L \neq \emptyset$ a $U \not\parallel V$) a jejich průnik sestává z jednoho bodu $[2,1,2,1]$.

Příklad 2.17:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [0,-1,-4,-5] + \langle (1,1,1,2), (-1,1,1,0), (2,4,5,8) \rangle \\ L =& [3,3,2,6] + \langle (1,0,-3,-3), (-2,-2,1,4) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [0,-1,-4,-5] \qquad \text{a třemi vektory } \vec{u}_1 = (1,1,1,2),\ \vec{u}_2 = (-1,1,1,0) \text{ a } \vec{u}_3 = (2,4,5,8)\,,$$

lineál $L = b + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [3,3,2,6] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{v}_1 = (1,0,-3,-3) \text{ a } \vec{v}_2 = (-2,-2,1,4)\,.$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$)
- za čáru vektory druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}_1$, $-\vec{v}_2$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého

lineálu L, tedy $b-a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \quad \vec{u}_3^T \;\middle|\; -\vec{v}_1^T \quad -\vec{v}_2^T \;\middle\|\; (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{ccc|cc||c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 3 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 8 & 3 & -4 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc||c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -8 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc||c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -8 & 4 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & s_1 & s_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|cc||c} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{}_{3} \quad \underbrace{}_{2}}_{4} \end{array} .$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$ a $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U+V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 3$, $\dim V = 2$ a $\dim(U+V) = 4$. Protože podmínka $\dim(U+V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Soustava sestává ze čtyř rovnic o pěti neznámých, proto za jednu neznámou (například s_1) zvolíme parametr s. Pro zjištění průniku potřebujeme čtvrtou a pátou neznámou $s_1 = s$ a $s_2 = -s$. Průnik $K \cap L$ je pak tvořen body

$$b + s_1 \cdot \vec{v}_1 + s_2 \cdot \vec{v}_2 = [3,3,2,6] + s \cdot (1,0,-3,-3) - s \cdot (-2,-2,1,4) = [3,3,2,6] + s \cdot (3,2,-4,-7) .$$

Pro kontrolu si opět můžeme dopočítat neznámé $t_1 = -\frac{5}{2} + \frac{41}{2}s$, $t_2 = -\frac{3}{2} + \frac{11}{2}s$ a $t_3 = 2 - 6s$, průsečík vyjde stejně

$$a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_2 + t_3 \cdot \vec{u}_3 =$$
$$[0,-1,-4,-5] + \left(-\tfrac{5}{2} + \tfrac{41}{2}s\right) \cdot (1,1,1,2) + \left(-\tfrac{3}{2} + \tfrac{11}{2}s\right) \cdot (-1,1,1,0) + (2-6s) \cdot (2,4,5,8) = [3,3,2,6] + s \cdot (3,2,-4,-7) .$$

Lineály K a L jsou tedy různoběžné (neboť $K \cap L \neq \emptyset$ a $U \not\parallel V$) a jejich průnik sestává z lineálu $K \cap L = [3,3,2,6] + \langle (3,2,-4,-7) \rangle$.

Příklad 2.18:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [2,1,-2,-3] + \langle (1,1,-1,2), (2,3,-1,5), (0,0,2,2) \rangle \\ L =& [3,3,0,2] + \langle (0,-1,-2,-3), (-1,1,4,3) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$ je popsán

$$\text{bodem } a = [2,1,-2,-3] \qquad \text{a třemi vektory } \vec{u}_1 = (1,1,-1,2),\ \vec{u}_2 = (2,3,-1,5) \text{ a } \vec{u}_3 = (0,0,2,2) ,$$

lineál $L = b + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ pak

$$\text{bodem } b = [3,3,0,2] \qquad \text{a dvěma vektory } \vec{v}_1 = (0,-1,-2,-3) \text{ a } \vec{v}_2 = (-1,1,4,3) .$$

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}_1$, $-\vec{v}_2$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b-a$

$$\left(\vec u_1^T \quad \vec u_2^T \quad \vec u_3^T \;\middle|\; -\vec v_1^T \quad -\vec v_2^T \;\middle\|\; (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{rrr|rr||r} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 1 & -1 & 2\\ -1 & -1 & 2 & 2 & -4 & 2\\ 2 & 5 & 2 & 3 & -3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr||r} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rr||r} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} t_1 & t_2 & t_3 & s_1 & s_2 \end{array}\\ \left(\begin{array}{rrr|rr||r} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \end{array} .$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec u_1, \vec u_2, \vec u_3\rangle$ a $V = \langle \vec v_1, \vec v_2\rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U+V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 3$, $\dim V = 2$ a $\dim(U+V) = 4$. Protože podmínka $\dim(U+V) = \max(\dim U, \dim V)$ neplatí, nejsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Soustava sestává ze čtyř rovnic o pěti neznámých, proto za jednu neznámou (například s_2) zvolíme parametr s. Pro zjištění průniku potřebujeme čtvrtou a pátou neznámou $s_1 = 2s$ a $s_2 = s$. Průnik $K \cap L$ je pak tvořen body

$$b + s_1 \cdot \vec v_1 + s_2 \cdot \vec v_2 = [3,3,0,2] + 2s \cdot (0,-1,-2,-3) + s \cdot (-1,1,4,3) = [3,3,0,2] + s \cdot (-1,-1,0,-3)\,.$$

Pro kontrolu můžeme dopočítat neznámé $t_1 = -1 - s$, $t_2 = 1$ a $t_3 = 1 - \frac{1}{2}s$, průsečík vyjde stejně

$$\begin{aligned} &a + t_1 \cdot \vec u_1 + t_2 \cdot \vec u_2 + t_3 \cdot \vec u_3 = \\ &= [2,1,-2,-3] - (1+s)\cdot(1,1,-1,2) + (2,3,-1,5) + (1 - \tfrac{1}{2}s)\cdot(0,0,2,2) = [3,3,0,2] + s\cdot(-1,-1,0,-3)\,. \end{aligned}$$

Lineály K a L jsou tedy různoběžné (neboť $K \cap L \neq \emptyset$ a $U \not\parallel V$) a jejich průnik sestává z lineálu $K \cap L = [3,3,0,2] + \langle(1,1,0,3)\rangle$.

Příklad 2.19:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K =& [2,3,1,-5] + \langle (1,-1,2,3), (2,1,1,1), (2,0,1,3)\rangle \\ L =& [4,0,-1,3] + \langle (1,0,2,1), (3,-2,3,8)\rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec u_1, \vec u_2, \vec u_3\rangle$ je popsán

bodem $a = [2,3,1,-5]$ a dvěma vektory $\vec u_1 = (1,-1,2,3)$, $\vec u_2 = (2,1,1,1)$ a $\vec u_3 = (2,0,1,3)$,

lineál $L = b + \langle \vec v_1, \vec v_2\rangle$ pak

bodem $b = [4,0,-1,3]$ a dvěma vektory $\vec v_1 = (1,0,2,1)$ a $\vec v_2 = (3,-2,3,8)$.

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec u_1$, $\vec u_2$, $\vec u_3$)
- za čáru vektory druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec v_1$, $-\vec v_2$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b - a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \quad \vec{u}_3^T \;\middle|\; -\vec{v}_1^T \quad -\vec{v}_2^T \;\middle\|\; (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{rrr|rr||r} 1 & 2 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -8 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rr||r} 1 & 2 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & -3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr||r} 1 & 2 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} t_1 & t_2 & t_3 & s_1 & s_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|rr||r} 1 & 2 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\hphantom{0\ 0\ 0}}_{3}\ \underbrace{\hphantom{-1\ -3}}_{2}}_{3} \end{array} .$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů. Neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$ a $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U+V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 3$, $\dim V = 2$ a $\dim(U+V) = 3$. Protože je podmínka $\dim(U+V) = \max(\dim U, \dim V)$ splněna, jsou zaměření U a V rovnoběžná.
Soustava nemá řešení, průnik $K \cap L$ je proto prázdný.
Lineály K a L jsou tedy rovnoběžné (neboť $K \cap L = \emptyset$ a $U \parallel V$) a jejich průnik je prázdná množina.

Příklad 2.20:
Zjistěte vzájemnou polohu lineálů

$$\begin{aligned} K &= [2,-2,3,1] + \langle (1,2,0,-3), (3,1,1,-1), (2,1,0,2) \rangle \\ L &= [7,-2,5,2] + \langle (4,3,1,-4), (1,-3,1,5) \rangle \end{aligned}$$

a jejich průnik.

řešení:
Lineál $K = a + \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$ je popsán

bodem $a = [2,-2,3,1]$ a třemi vektory $\vec{u}_1 = (1,2,0,-3)$, $\vec{u}_2 = (3,1,1,-1)$ a $\vec{u}_3 = (2,1,0,2)$,

lineál $L = b + \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ pak

bodem $b = [7,-2,5,2]$ a dvěma vektory $\vec{v}_1 = (4,3,1,-4)$ a $\vec{v}_2 = (1,-3,1,5)$.

Do jedné matice zapíšeme po řadě do sloupců
- vektory prvního lineálu ($\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$)
- za čáru vektor druhého lineálu s opačným znaménkem ($-\vec{v}_1$, $-\vec{v}_2$)
- za dvojitou čáru pak vektor, který vznikne odečtením bodu příslušného prvnímu lineálu K od bodu druhého lineálu L, tedy $b - a$

$$\left(\vec{u}_1^T \quad \vec{u}_2^T \quad \vec{u}_3^T \;\middle|\; -\vec{v}_1^T \quad -\vec{v}_2^T \;\middle\|\; (b-a)^T\right) = \left(\begin{array}{rrr|rr||r} 1 & 3 & 2 & -4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & 4 & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr||r} 1 & 3 & 2 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & 5 & 5 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 8 & 8 & -8 & -8 & 16 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rr||r} 1 & 3 & 2 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & -5 & -5 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr||r} 1 & 3 & 2 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} t_1 & t_2 & t_3 & s_1 & s_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|rr||r} 1 & 3 & 2 & -4 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \underbrace{\underbrace{\hphantom{0\ 0\ 0}}_{3}\ \underbrace{\hphantom{-1\ -1}}_{2}}_{3} \end{array} .$$

Potřebujeme zjistit, v jakém vzájemném vztahu jsou zaměření lineálů, neboli jsou-li příslušné vektorové prostory $U = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$ a $V = \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ rovnoběžné. Dimenze prostorů $U+V$, U a V poznáme podle hodnosti částí matice soustavy, tedy $\dim U = 3$, $\dim V = 2$ a $\dim(U+V) = 3$. Protože je podmínka $\dim(U+V) = \max(\dim U, \dim V)$ splněna, jsou zaměření U a V lineálů rovnoběžná.
Soustava sestává ze tří rovnic o pěti neznámých, proto dvě neznámé (například s_1, s_2) budeme považovat za parametry. Průnik $K \cap L$ je pak tvořen lineálem L. Pro kontrolu můžeme dopočítat neznámé $t_1 = -1 + s_1 - 2s_2$, $t_2 = 2 + s_1 + s_2$ a $t_3 = 0$, průsečík vyjde stejně

$$a + t_1 \cdot \vec{u}_1 + t_2 \cdot \vec{u}_2 + t_3 \cdot \vec{u}_3 =$$
$$= [2,-2,3,1] + (-1+s_1-2s_2)\cdot(1,2,0,-3) + (2+s_1+s_2)\cdot(3,1,1,-1) = [7,-2,5,2] + s_1\cdot(4,3,1,-4) + s_2\cdot(1,-3,1,5)\,.$$

Lineál L je tedy podmnožinou K (neboť $K \cap L = L \neq \emptyset$ a $U \parallel V$).

3. Příčky mimoběžek

Příklad 3.1:
Zjistěte příčku dvou mimoběžek $p = A + \langle \vec{u} \rangle = [1, -2, 5] + \langle (-3, 2, -1) \rangle$ a $q = B + \langle \vec{v} \rangle = [0, 1, 3] + \langle (1, 1, 1) \rangle$, která je rovnoběžná s vektorem $\vec{w} = (2, -1, 1)$. Zjistěte také průsečíky příčky s mimoběžkami.

řešení:
Směr hledané příčky (označme ji r) je daný vektorem $\vec{w}$, zbývá tedy zjistit jeden její bod. Tento bod najdeme jako průsečík roviny ρ určené přímkou q a směrem $\vec{w}$, tedy

$$\rho = A + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = [1, -2, 5] + \langle (-3, 2, -1), (2, -1, 1) \rangle$$

a přímky

$$q = B + \langle \vec{v} \rangle = [0, 1, 3] + \langle (1, 1, 1) \rangle .$$

Při hledání průniku (označme bod v něm ležící D) budeme postupovat stejně jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr|r||r} -3 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{rrrr} t_1 & t_2 & s & \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) ,$$

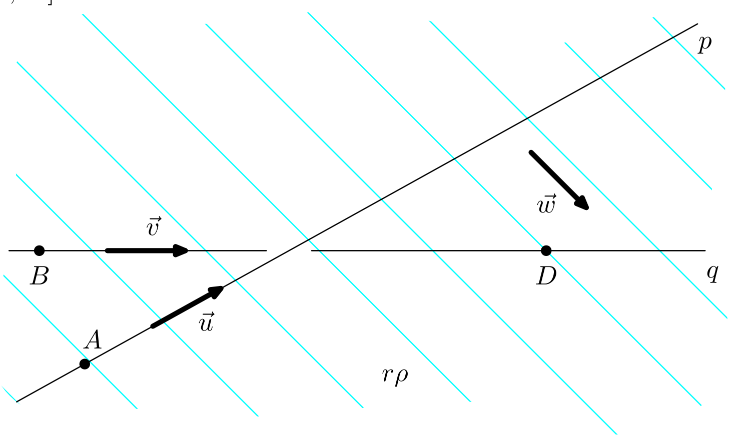
z poslední řádky dostáváme parametr $s = -4$, a tedy bod $D = [0, 1, 3] - 4 \cdot (1, 1, 1) = [-4, -3, -1]$. Zapíšeme hledanou příčku $r = D + \langle \vec{w} \rangle = [-4, -3, -1] + \langle (2, -1, 1) \rangle$.

Poznamenejme, že souřadnice bodu D můžeme zjistit také pomocí parametrů $t_1 = -7$ a $t_2 = -13$ dopočítaných ze soustavy. Potom $D = [1, -2, 5] - 7 \cdot (-3, 2, -1) - 13 \cdot (2, -1, 1) = [-4, -3, -1]$.

Bod D je průsečík příčky r a mimoběžky q. Průsečík příčky r a mimoběžky p označíme E a vzpočítáme ho (opět jako v kapitole 2) pomocí soustavy

$$\left(\vec{u}^T \mid -\vec{w}^T \parallel (D - E)^T \right) = \left(\begin{array}{r|r||r} -3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} t & s & \end{array} \end{array}$$

a dostaneme $E = D + s \cdot \vec{w} = [-4, -3, -1] + 13 \cdot (2, -1, 1) = [22, -16, 12]$ nebo $E = A + t \cdot \vec{u} = [1, -2, 5] - 7 \cdot (-3, 2, -1) = [22, -16, 12]$.



Příklad 3.2:
Zjistěte příčku dvou mimoběžek $p = A + \langle \vec{u} \rangle = [1, -2, 5] + \langle (-3, 2, -1) \rangle$ a $q = B + \langle \vec{v} \rangle = [0, 1, 3] + \langle (1, 1, 1) \rangle$, která prochází bodem $C = [-13, 7, 0]$. Zjistěte také průsečíky příčky s mimoběžkami.

řešení:
Známe jeden bod C hledané příčky (označme ji r), potřebovali bychom zjistit ještě jeden (označme ho D).

Víme, že hledaná příčka bude ležet v rovině určené přímkou $p = A + \langle\vec{u}\rangle$ a bodem C, neboli v rovině ρ určené bodem A a vektory $\vec{u}$ a $C - A = (-14, 9, -5)$. Bod D, ve kterém bude hledaná příčka r protínat přímku q tedy najdeme jako průsečík roviny $\rho = A + \langle\vec{u}, C - A\rangle = [1, -2, 5] + \langle(-3, 2, -1), (-14, 9, -5)\rangle$ a přímky $q = B + \langle\vec{v}\rangle = [0, 1, 3] + \langle(1, 1, 1)\rangle$. Při hledání jejich průniku budeme postupovat stejně jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c||c} -3 & -14 & -1 & -1 \\ 2 & 9 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & -1 & -2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & s \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) ,$$

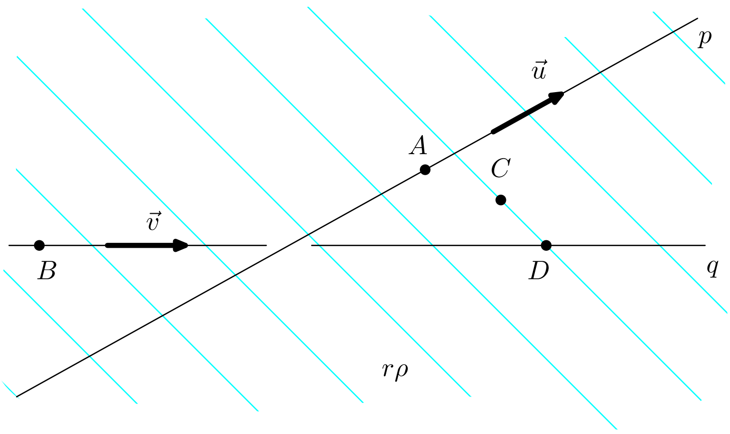
z poslední řádky dostáváme parametr $s = -4$, a tedy $D = [0, 1, 3] - 4 \cdot (1, 1, 1) = [-4, -3, -1]$. Zapíšeme hledanou příčku $r = D + \langle C - D\rangle = [-4, -3, -1] + \langle(-9, 10, 1)\rangle$.

Poznamenejme, že souřadnice bodu D můžeme zjistit také pomocí parametrů $t_1 = -59$ a $t_2 = 13$ dopočítaných ze soustavy. Potom $D = [1, -2, 5] - 59 \cdot (-3, 2, -1) + 13 \cdot (-14, 9, -5) = [-4, -3, -1]$.

Bod D je průsečík příčky r a mimoběžky q. Průsečík příčky r a mimoběžky p označíme E a vzpočítáme ho (opět jako v kapitole 2) pomocí soustavy

$$\left(\vec{u}^T \mid -(C - D)^T \parallel (D - A)^T\right) = \left(\begin{array}{c|c||c} -3 & 9 & -5 \\ 2 & -10 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{c|c||c} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c||c} 12 & 0 & 59 \\ 0 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} t & s \end{array} \end{array}$$

a dostaneme $E = D + s \cdot (C - D) = [-4, -3, -1] + \frac{13}{12} \cdot (9, -10, -1) = [-\frac{55}{4}, \frac{47}{6}, \frac{1}{12}]$ nebo $E = A + t \cdot \vec{u} = [1, -2, 5] + \frac{59}{12} \cdot (-3, 2, -1) = [-\frac{55}{4}, \frac{47}{6}, \frac{1}{12}]$.



Příklad 3.3:
Zjistěte příčku dvou mimoběžek $p = A + \langle\vec{u}\rangle = [1, -2, 5] + \langle(-3, 2, -1)\rangle$ a $q = B + \langle\vec{v}\rangle = [0, 1, 3] + (1, 1, 1)$, která prochází bodem $C = [-2, -4, 0]$.

řešení:
Známe jeden bod C hledané příčky (označme ji r), potřebovali bychom zjistit ještě jeden (označme ho D). Víme, že hledaná příčka bude ležet v rovině určené přímkou $p = A + \langle\vec{u}\rangle$ a bodem C, neboli v rovině ρ určené bodem A a vektory $\vec{u}$ a $C - A = (-3, -2, -5)$. Bod D, ve kterém bude hledaná příčka r protínat přímku q tedy najdeme jako průsečík roviny $\rho = A + \langle\vec{u}, C - A\rangle = [1, -2, 5] + \langle(-3, 2, -1), (-3, -2, -5)\rangle$ a přímky $q = B + \langle\vec{v}\rangle = [0, 1, 3] + \langle(1, 1, 1)\rangle$. Při hledání jejich průniku budeme postupovat stejně jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c||c} -3 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & -1 & -2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & s \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 2 & 5 \\ 0 & -12 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c||c} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array}\right) ,$$

z poslední řádky dostáváme parametr $s = -4$, a tedy $D = [0, 1, 3] - 4 \cdot (1, 1, 1) = [-4, -3, -1]$. Zapíšeme hledanou příčku $r = D + \langle C - D\rangle = [-4, -3, -1] + \langle(2, -1, 1)\rangle$.

Poznamenejme, že souřadnice bodu D můžeme zjistit také pomocí parametrů $t_1 = \frac{7}{12}$ a $t_2 = \frac{13}{12}$ dopočítaných ze soustavy. Potom $D = [1, -2, 5] + \frac{7}{12} \cdot (-3, 2, -1) + \frac{13}{12} \cdot (-3, -2, -5) = [-4, -3, -1]$.

Bod D je průsečík příčky r a mimoběžky q. Průsečík příčky r a mimoběžky p označíme E a vzpočítáme ho (opět jako v kapitole 2) pomocí soustavy

$$\left(\vec{u}^T \mid -(C-D)^T \parallel (D-A)^T\right) = \left(\begin{array}{r|r||r} -3 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} t & s \end{array} \end{array}$$

a dostaneme $E = D + s\cdot(C-D) = A + t\cdot\vec{u} = [22, -16, 12]$.

Příklad 3.4:
Zjistěte nejkratší příčku dvou mimoběžek $p = A + \langle\vec{u}\rangle = [4,2,2] + \langle(2,3,2)\rangle$ a $q = B + \langle\vec{v}\rangle = [-2,1,7] + \langle(1,0,2)\rangle$. Dále zjistěte vzdálenost mimoběžek p a q.

řešení:
Nejkratší příčka (označme ji r) je kolmá na obě mimoběžky. Její směr bude tedy kolmý na oba vektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Vektor kolmý na oba zjistíme jednoduše, například vektorovým součinem

$$\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} = (2,3,2)\times(1,0,2) = (6,-2,-3).$$

Tím máme dán směr hledané příčky, zbývá tedy zjistit jeden její bod. Tento bod najdeme opět jako průsečík roviny ρ určené přímkou p a směrem $\vec{w}$, tedy

$$\rho = A + \langle\vec{u},\vec{w}\rangle = [4,2,2] + \langle(2,3,2),(6,-2,-3)\rangle = [4,2,2] + (2,3,2)\cdot t_1 + (6,-2,-3)\cdot t_2$$

a přímky

$$q = B + \langle\vec{v}\rangle = [-2,1,7] + \langle(1,0,2)\rangle = [-2,1,7] + (1,0,2)\cdot s$$

Při hledání průniku (označme bod v něm ležící D) budeme postupovat stejně jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr|r||r} 2 & 6 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -2 & 5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & s \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 2 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & -17 \\ 0 & 9 & 1 & -11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 2 & -3 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & 6 & -17 \\ 0 & 0 & 49 & -98 \end{array}\right),$$

z poslední řádky dostáváme parametr $s = -2$, a tedy $D = [-2,1,7] - 2\cdot(1,0,2) = [-4,1,3]$. Zapíšeme hledanou příčku $r = D + \langle\vec{w}\rangle = [-4,1,3] + \langle(6,-2,-3)\rangle$.

Vzdálenost mimoběžek p a q zjišťujeme na příčce r kolmé na obě dvě. Průsečík $D = [-4,1,3]$ příčky r a mimoběžky q známe, potřebujeme najít ještě průsečík (označme ho C) příčky $r = [-4,1,3] + (6,-2,-3)\cdot t$ a mimoběžky $p = [4,2,2] + (2,3,2)\cdot s$ opět jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{r|r||r} 6 & -2 & 8 \\ -2 & -3 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} t & s \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{r|r||r} 6 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

z předposlední řádky dostáváme parametr $s = -1$, a tedy $C = [4,2,2] - (2,3,2) = [2,-1,0]$. Vzdálenost mimoběžek p a q je rovna vzdálenosti bodů C a D, což vypočítáme podle vzorce

$$dist(C,D) = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2} = \sqrt{(2+4)^2 + (-1-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7\ .$$

Příklad 3.5:
Zjistěte nejkratší příčku dvou mimoběžek $p = A + \langle\vec{u}\rangle = [5,15,-4] + \langle(3,2,2)\rangle$ a $q = B + \langle\vec{v}\rangle = [-2,5,-3] + \langle(6,3,2)\rangle$. Dále zjistěte vzdálenost mimoběžek p a q.

řešení:
Nejkratší příčka (označme ji r) je kolmá na obě mimoběžky. Její směr bude tedy kolmý na oba vektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Vektor kolmý na oba zjistíme jednoduše, například vektorovým součinem

$$\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} = (3,2,2)\times(6,3,2) = (-2,6,-3).$$

Tím máme dán směr hledané příčky, zbývá tedy zjistit jeden její bod. Tento bod najdeme opět jako průsečík roviny ρ určené přímkou p a směrem $\vec{w}$, tedy

$$\rho = A + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = [5, 15, -4] + \langle (3, 2, 2), (-2, 6, -3) \rangle = [5, 15, -4] + (3, 2, 2) \cdot t_1 + (-2, 6, -3) \cdot t_2$$

a přímky

$$q = B + \langle \vec{v} \rangle = [-2, 5, -3] + \langle (6, 3, 2) \rangle = [-2, 5, -3] + (6, 3, 2) \cdot s$$

Při hledání průniku (označme bod v něm ležící D) budeme postupovat stejně jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr|r||r} 3 & -2 & -6 & -7 \\ 2 & 6 & -3 & -10 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \\ t_1 \quad t_2 \quad s \qquad\quad \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 \\ 0 & 5 & -6 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 2 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & -1 & -11 \\ 0 & 0 & 49 & 98 \end{array}\right),$$

z poslední řádky dostáváme parametr $s = 2$, a tedy $D = [-2, 5, -3] + 2 \cdot (6, 3, 2) = [10, 11, 1]$. Zapíšeme hledanou příčku $r = D + \langle \vec{w} \rangle = [10, 11, 1] + \langle (-2, 6, -3) \rangle$.

Vzdálenost mimoběžek p a q zjišťujeme na příčce r kolmé na obě dvě. Průsečík $D = [10, 11, 1]$ příčky r a mimoběžky q známe, potřebujeme najít ještě průsečík (označme ho C) příčky $r = [10, 11, 1] + (-2, 6, -3) \cdot t$ a mimoběžky $p = [5, 15, -4] + (3, 2, 2) \cdot s$ opět jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{r|r||r} -2 & -3 & -5 \\ 6 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -5 \end{array}\right) \\ t \quad\; s \qquad \end{array} \sim \left(\begin{array}{r|r||r} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

z předposlední řádky dostáváme parametr $s = 1$, a tedy $C = [5, 15, -4] + (3, 2, 2) = [8, 17, -2]$. Vzdálenost mimoběžek p a q je rovna vzdálenosti bodů C a D, což vypočítáme podle vzorce

$$dist(C, D) = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2} = \sqrt{(10 - 8)^2 + (11 - 17)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{49} = 7\ .$$

Příklad 3.6:
Zjistěte nejkratší příčku dvou mimoběžek $p = A + \langle \vec{u} \rangle = [-1, 7, -4] + \langle (1, -2, 1) \rangle$ a $q = B + \langle \vec{v} \rangle = [1, 6, 6] + \langle (3, 1, 1) \rangle$. Dále zjistěte vzdálenost mimoběžek p a q.

řešení:
Nejkratší příčka (označme ji r) je kolmá na obě mimoběžky. Její směr bude tedy kolmý na oba vektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Vektor kolmý na oba zjistíme jednoduše, například vektorovým součinem

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1, -2, 1) \times (3, 1, 1) = (-3, 2, 7).$$

Tím máme dán směr hledané příčky, zbývá tedy zjistit jeden její bod. Tento bod najdeme opět jako průsečík roviny ρ určené přímkou p a směrem $\vec{w}$, tedy

$$\rho = A + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = [-1, 7, -4] + \langle (1, -2, 1), (-3, 2, 7) \rangle = [-1, 7, -4] + (1, -2, 1) \cdot t_1 + (-3, 2, 7) \cdot t_2$$

a přímky

$$q = B + \langle \vec{v} \rangle = [1, 6, 6] + \langle (3, 1, 1) \rangle = [1, 6, 6] + (3, 1, 1) \cdot s$$

Při hledání průniku (označme bod v něm ležící D) budeme postupovat stejně jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -3 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right) \\ t_1 \quad t_2 \quad s \qquad\quad \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 10 & 2 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

z poslední řádky dostáváme parametr $s = -1$, a tedy $D = [1, 6, 6] - (3, 1, 1) = [-2, 5, 5]$. Zapíšeme hledanou příčku $r = D + \langle \vec{w} \rangle = [-2, 5, 5] + \langle (-3, 2, 7) \rangle$.

Vzdálenost mimoběžek p a q zjišťujeme na příčce r kolmé na obě dvě. Průsečík $D = [-2,5,5]$ příčky r a mimoběžky q známe, potřebujeme najít ještě průsečík (označme ho C) příčky $r = [-2,5,5] + (-3,2,7)\cdot t$ a mimoběžky $p = [-1,7,-4] + (1,-2,1)\cdot s$ opět jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{r|r||r} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & -9 \end{array}\right) \\ \begin{array}{rr} t & \; s \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

z předposlední řádky dostáváme parametr $s = 2$, a tedy $C = [-1,7,-4] + 2\cdot(1,-2,1) = [1,3,-2]$. Vzdálenost mimoběžek p a q je rovna vzdálenosti bodů C a D, což vypočítáme podle vzorce

$$dist(C,D) = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2} = \sqrt{(1+2)^2 + (3-5)^2 + (-2-5)^2} = \sqrt{62} \doteq 7,874\ .$$

Příklad 3.7:
Zjistěte nejkratší příčku dvou mimoběžek $p = A + \langle\vec{u}\rangle = [1,-3,1] + \langle(1,2,0)\rangle$ a $q = B + \langle\vec{v}\rangle = [-2,4,-4] + \langle(1,0,-3)\rangle$. Dále zjistěte vzdálenost mimoběžek p a q.

řešení:
Nejkratší příčka (označme ji r) je kolmá na obě mimoběžky. Její směr bude tedy kolmý na oba vektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Vektor kolmý na oba zjistíme opět vektorovým součinem

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (1,2,0) \times (1,0,-3) = (-6,3,-2).$$

Tím máme dán směr hledané příčky, zbývá tedy zjistit jeden její bod. Tento bod najdeme opět jako průsečík roviny ρ určené přímkou p a směrem $\vec{w}$, tedy

$$\rho = A + \langle\vec{u},\vec{w}\rangle = [1,-3,1] + \langle(1,2,0),(-6,3,-2)\rangle = [1,-3,1] + (1,2,0)\cdot t_1 + (-6,3,-2)\cdot t_2$$

a přímky

$$q = B + \langle\vec{v}\rangle = [-2,4,-4] + \langle(1,0,-3)\rangle = [-2,4,-4] + (1,0,-3)\cdot s\ .$$

Při hledání průniku (označme bod v něm ležící D) budeme postupovat stejně jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -6 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & s \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 2 & 13 \\ 0 & -2 & 3 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & -6 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & 49 & -49 \end{array}\right),$$

z poslední řádky dostáváme parametr $s = -1$, a tedy $D = [-2,4,-4] - (1,0,-3) = [-3,4,-1]$. Zapíšeme hledanou příčku $r = D + \langle\vec{w}\rangle = [-3,4,-1] + \langle(-6,3,-2)\rangle$.

Vzdálenost mimoběžek p a q zjišťujeme na příčce r kolmé na obě dvě. Průsečík $D = [-3,4,-1]$ příčky r a mimoběžky q známe, potřebujeme najít ještě průsečík (označme ho C) příčky $r = [-3,4,-1] + (-6,3,-2)\cdot t$ a mimoběžky $p = [1,-3,1] + (1,2,0)\cdot s$ opět jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{r|r||r} -6 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{rr} t & \; s \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

z předposlední řádky dostáváme parametr $s = 2$, a tedy $C = [1,-3,1] + 2\cdot(1,2,0) = [3,1,1]$. Vzdálenost mimoběžek p a q je rovna vzdálenosti bodů C a D, což vypočítáme podle vzorce

$$dist(C,D) = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7\ .$$

Příklad 3.8:
Zjistěte nejkratší příčku dvou mimoběžek $p = A + \langle\vec{u}\rangle = [2,1,5] + \langle(0,1,1)\rangle$ a $q = B + \langle\vec{v}\rangle = [-3,-3,-1] + \langle(2,2,1)\rangle$. Dále zjistěte vzdálenost mimoběžek p a q.

řešení:
Nejkratší příčka (označme ji r) je kolmá na obě mimoběžky. Její směr bude tedy kolmý na oba vektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

Vektor kolmý na oba zjistíme vektorovým součinem

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (0,1,1) \times (2,2,1) = (-1,2,-2).$$

Tím máme dán směr hledané příčky, zbývá tedy zjistit jeden její bod. Tento bod najdeme opět jako průsečík roviny ρ určené přímkou p a směrem $\vec{w}$, tedy

$$\rho = A + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = [2,1,5] + \langle (0,1,1), (-1,2,-2) \rangle = [2,1,5] + (0,1,1) \cdot t_1 + (-1,2,-2) \cdot t_2$$

a přímky

$$q = B + \langle \vec{v} \rangle = [-3,-3,-1] + \langle (2,2,1) \rangle = [-3,-3,-1] + (2,2,1) \cdot s$$

Při hledání průniku (označme bod v něm ležící D) budeme postupovat stejně jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr|r||r} 0 & -1 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & -2 & -1 & -6 \end{array}\right) \\ t_1 \quad t_2 \quad s \qquad\quad \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right),$$

z poslední řádky dostáváme parametr $s = 2$, a tedy $D = [-3,-3,-1] + 2 \cdot (2,2,1) = [1,1,1]$. Zapíšeme hledanou příčku $r = D + \langle \vec{w} \rangle = [1,1,1] + \langle (-1,2,-2) \rangle$.

Vzdálenost mimoběžek p a q zjišťujeme na příčce r kolmé na obě dvě. Průsečík $D = [1,1,1]$ příčky r a mimoběžky q známe, potřebujeme najít ještě průsečík (označme ho C) mimoběžky $p = [2,1,5] + (0,1,1) \cdot t$ a příčky $r = [1,1,1] + (-1,2,-2) \cdot s$ opět jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{r|r||r} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{array}\right) \\ t \quad s \qquad \end{array} \sim \left(\begin{array}{r|r||r} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

z předposlední řádky dostáváme parametr $s = -1$, a tedy $C = [1,1,1] - (-1,2,-2) = [2,-1,3]$. Vzdálenost mimoběžek p a q je rovna vzdálenosti bodů C a D, což vypočítáme podle vzorce

$$dist(C,D) = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 .$$

Příklad 3.9:
Zjistěte nejkratší příčku dvou mimoběžek $p = A + \langle \vec{u} \rangle = [3,3,-2] + \langle (0,1,0) \rangle$ a $q = B + \langle \vec{v} \rangle = [2,1,5] + \langle (3,0,4) \rangle$. Dále zjistěte vzdálenost mimoběžek p a q.

řešení:
Nejkratší příčka (označme ji r) je kolmá na obě mimoběžky. Její směr bude tedy kolmý na oba vektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Vektor kolmý na oba zjistíme vektorovým součinem

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (0,1,0) \times (3,0,4) = (4,0,-3).$$

Tím máme dán směr hledané příčky, zbývá tedy zjistit jeden její bod. Tento bod najdeme opět jako průsečík roviny ρ určené přímkou p a směrem $\vec{w}$, tedy

$$\rho = A + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = [3,3,-2] + \langle (0,1,0), (4,0,-3) \rangle = [3,3,-2] + (0,1,0) \cdot t_1 + (4,0,-3) \cdot t_2$$

a přímky

$$q = B + \langle \vec{v} \rangle = [2,1,5] + \langle (3,0,4) \rangle = [2,1,5] + (3,0,4) \cdot s$$

Při hledání průniku (označme bod v něm ležící D) budeme postupovat stejně jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{rr|r||r} 0 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -4 & 7 \end{array}\right) \\ t_1 \quad t_2 \quad s \qquad\quad \end{array} \sim \left(\begin{array}{rr|r||r} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

z poslední řádky dostáváme parametr $s = -1$, a tedy $D = [2,1,5] - 1 \cdot (3,0,4) = [-1,1,1]$. Zapíšeme hledanou příčku $r = D + \langle \vec{w} \rangle = [-1,1,1] + \langle (4,0,-3) \rangle$.

Vzdálenost mimoběžek p a q zjišťujeme na příčce r kolmé na obě dvě. Průsečík $D = [-1, 1, 1]$ příčky r a mimoběžky q známe, potřebujeme najít ještě průsečík (označme ho C) mimoběžky $p = [3, 3, -2] + (0, 1, 0) \cdot t$ a příčky $r = [-1, 1, 1] + (4, 0, -3) \cdot s$ opět jako v kapitole 2

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c||c} 0 & -4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} t & s \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{c|c||c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ,$$

z předposlední řádky dostáváme parametr $s = 1$, a tedy $C = [-1, 1, 1] - (4, 0, -3) = [3, 1, -2]$. Vzdálenost mimoběžek p a q je rovna vzdálenosti bodů C a D, což vypočítáme podle vzorce

$$dist(C, D) = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2 + (z_C - z_D)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \ .$$

4. Vzdálenost bodu od nadroviny

Pro výpočet vzdálenosti bodu $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ od nadroviny ρ popsané obecnou rovnicí

$$\nu_1 \cdot x_1 + \nu_2 \cdot x_2 + \nu_3 \cdot x_3 + \nu_4 \cdot x_4 + d = 0$$

využijeme vzorec

$$d(A, \rho) = \frac{|\nu_1 \cdot a_1 + \nu_2 \cdot a_2 + \nu_3 \cdot a_3 + \nu_4 \cdot a_4 + d|}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 + \nu_4^2}} .$$

Příklad 4.1:
Zjistěte vzdálenost bodu $A = [2, 1, 3, 1]$ od nadroviny $\rho = [-2, 3, 10, 1] + \langle(2, 1, 0, 1), (2, 4, 3, -2), (0, 3, -1, -5)\rangle$.

řešení:
Nadrovinu máme zadanou pomocí bodu $B = [-2, 3, 10, 1]$ a tří vektorů $\vec{u} = (2, 1, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, 4, 3, -2)$ a $\vec{w} = (0, 3, -1, -5)$, tedy v podstatě parametricky. Zbývá převést toto vyjádření na obecnou rovnici. Nejprve najdeme vektor $\vec{\nu}$ kolmý na nadrovinu, tedy kolmý na vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, (tento vektor $\vec{\nu}$ určuje tzv. ortogonální doplněk $\rho^\perp$nadroviny ρ - viz kapitola 1). Řešíme tedy soustavu rovnic zadanou následující maticí

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \rho^\perp = \langle(5, -6, 2, -4)\rangle \,.$$

Nulovou pravou stranu budeme zpravidla vynechávat a upravíme na tvar

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} ,$$

odkud snáze získáme hledaný vektor.
Známe-li bod $B = [-2, 3.10, 1]$ nadroviny a vektor $\vec{\nu} = (5, -6, 2, -4)$ na ni kolmý, umíme napsat její obecnou rovnici

$$\nu_1 \cdot (x_1 - b_1) + \nu_2 \cdot (x_2 - b_2) + \nu_3 \cdot (x_3 - b_3) + \nu_4 \cdot (x_4 - b_4) = 0 \,,$$

neboli po dosazení a úpravě

$$5 \cdot (x_1 + 2) - 6 \cdot (x_2 - 3) + 2 \cdot (x_3 - 10) - 4 \cdot (x_4 - 1) = 0$$
$$5x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 12 = 0 \,.$$

Nakonec dosadíme do uvedeného vzorce

$$d(A, \rho) = \frac{|5 \cdot 2 - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 1 + 12|}{\sqrt{5^2 + (-6)^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{18}{9} = 2 \,.$$

Příklad 4.2:
Zjistěte vzdálenost bodu $A = [2, -5, 2, 3]$ od nadroviny $\rho = [2, -4, 7, 2] + \langle(7, 2, 0, -4), (0, 2, 7, 4), (-1, 5, -1, 0)\rangle$.

řešení:
Nadrovinu máme zadanou pomocí bodu $B = [2, -4, 7, 2]$ a tří vektorů $\vec{u} = (7, 2, 0, -4)$, $\vec{v} = (0, 2, 7, 4)$ a $\vec{w} = (-1, 5, -1, 0)$, tedy parametricky. Převedeme toto vyjádření na obecnou rovnici. Nejprve najdeme vektor $\vec{\nu}$ kolmý na nadrovinu, tedy kolmý na vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, (tento vektor $\vec{\nu}$ určuje tzv. ortogonální doplněk $\rho^\perp$ nadroviny ρ). Řešíme tedy soustavu rovnic zadanou následující maticí

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ -1 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 37 & -7 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 4 \\ 0 & 39 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad \rho^\perp = \langle(-4, 0, 4, -7)\rangle \,.$$

Známe-li bod nadroviny $B = [2, -4, -7, 2]$ a vektor $\vec{\nu} = (-4, 0, 4, -7)$ na ni kolmý, umíme napsat její obecnou rovnici

$$\nu_1 \cdot (x_1 - b_1) + \nu_2 \cdot (x_2 - b_2) + \nu_3 \cdot (x_3 - b_3) + \nu_4 \cdot (x_4 - b_4) = 0\,,$$

neboli po dosazení a úpravě

$$\begin{aligned} -4 \cdot (x_1 - 2) + 4 \cdot (x_3 - 7) - 7 \cdot (x_4 - 2) &= 0 \\ 4x_1 - 4x_3 + 7x_4 + 6 &= 0\,. \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme do uvedeného vzorce

$$d(A, \rho) = \frac{|4 \cdot 2 - 4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 6|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2}} = \frac{27}{9} = 3\,.$$

Příklad 4.3:
Zjistěte vzdálenost bodu $A = [-2, 1, 2, -1]$ od nadroviny $\rho = [-2, 5, -3, -2] + \langle(3, -2, 2, 0), (3, -5, 0, 1), (0, -7, 2, -1)\rangle$.

řešení:
Nadrovinu máme zadanou pomocí bodu $B = [-2, 5, -3, -2]$ a tří vektorů $\vec{u} = (3, -2, 2, 0)$, $\vec{v} = (3, -5, 0, 1)$ a $\vec{w} = (0, -7, 2, -1)$, tedy parametricky. Zbývá převést toto vyjádření na obecnou rovnici. Nejprve najdeme vektor $\vec{\nu}$ kolmý na nadrovinu, tedy kolmý na vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, (tento vektor $\vec{\nu}$ určuje tzv. ortogonální doplněk $\rho^{\perp}$ nadroviny ρ). Řešíme tedy soustavu rovnic zadanou následující maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \rho^{\perp} = \langle(-2, 0, 3, 6)\rangle\,.$$

Známe-li bod $B = [-2, 5, -3, -2]$ nadroviny a vektor $\vec{\nu} = (-2, 0, 3, 6)$ na ni kolmý, umíme napsat její obecnou rovnici

$$\nu_1 \cdot (x_1 - b_1) + \nu_2 \cdot (x_2 - b_2) + \nu_3 \cdot (x_3 - b_3) + \nu_4 \cdot (x_4 - b_4) = 0\,,$$

neboli po dosazení a úpravě

$$\begin{aligned} -2 \cdot (x_1 + 2) + 3 \cdot (x_3 + 3) + 6 \cdot (x_4 + 2) &= 0 \\ -2x_1 + 3x_3 + 6x_4 + 17 &= 0\,. \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme do uvedeného vzorce

$$d(A, \rho) = \frac{|-2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) + 17|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{21}{7} = 3\,.$$

Příklad 4.4:
Zjistěte vzdálenost bodu $A = [3, -1, 2, 1]$ od nadroviny $\rho = [1, 0, 1, -1] + \langle(1, 6, 1, 1), (0, 2, 1, 1), (1, -1, 1, 0)\rangle$.

řešení:
Nadrovinu máme zadanou pomocí bodu $B = [1, 0, 1, -1]$ a tří vektorů $\vec{u} = (1, 6, 1, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 1, 1)$ a $\vec{w} = (1, -1, 1, 0)$, tedy parametricky. Zbývá převést toto vyjádření na obecnou rovnici. Nejprve najdeme vektor $\vec{\nu}$ kolmý na nadrovinu, tedy kolmý na vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, (tento vektor $\vec{\nu}$ určuje tzv. ortogonální doplněk $\rho^{\perp}$ nadroviny ρ). Řešíme tedy soustavu rovnic zadanou následující maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \qquad \rho^{\perp} = \langle(4, -1, -5, 7)\rangle\,.$$

Známe-li bod $B = [1, 0, 1, -1]$ nadroviny a vektor $\vec{\nu} = (4, -1, -5, 7)$ na ni kolmý, umíme napsat její obecnou rovnici

$$\nu_1 \cdot (x_1 - b_1) + \nu_2 \cdot (x_2 - b_2) + \nu_3 \cdot (x_3 - b_3) + \nu_4 \cdot (x_4 - b_4) = 0\,,$$

neboli po dosazení a úpravě

$$\begin{aligned} 4 \cdot (x_1 - 1) - 1 \cdot x_2 - 5 \cdot (x_3 - 1) + 7 \cdot (x_4 + 1) &= 0 \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 8 &= 0\,. \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme do uvedeného vzorce

$$d(A, \rho) = \frac{|4 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 7 \cdot 1 + 8|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-5)^2 + 7^2}} = \frac{18}{\sqrt{91}} \doteq 1,887\,.$$

Příklad 4.5:
Zjistěte vzdálenost bodu $A = [1, -2, 1, -3]$ od nadroviny $\rho = [2, 8, 5, -3] + \langle (1, 0, 5, -2), (1, 3, 7, 0), (0, 3, 1, 2) \rangle$.

řešení:
Nadrovinu máme zadanou pomocí bodu $B = [2, 8, 5, -3]$ a tří vektorů $\vec{u} = (1, 0, 5, -2)$, $\vec{v} = (1, 3, 7, 0)$ a $\vec{w} = (0, 3, 1, 2)$, tedy parametricky. Zbývá převést toto vyjádření na obecnou rovnici. Nejprve najdeme vektor $\vec{\nu}$ kolmý na nadrovinu, tedy kolmý na vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, (tento vektor $\vec{\nu}$ určuje tzv. ortogonální doplněk $\rho^{\perp}$ nadroviny ρ). Řešíme tedy soustavu rovnic zadanou následující maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho^{\perp} = \langle (6, -2, 0, 3) \rangle\,.$$

Známe-li bod $B = [2, 8, 5, -3]$ nadroviny a vektor $\vec{\nu} = (6, -2, 0, 3)$ na ni kolmý, umíme napsat její obecnou rovnici

$$\nu_1 \cdot (x_1 - b_1) + \nu_2 \cdot (x_2 - b_2) + \nu_3 \cdot (x_3 - b_3) + \nu_4 \cdot (x_4 - b_4) = 0\,,$$

neboli po dosazení a úpravě

$$\begin{aligned} 6 \cdot (x_1 - 2) - 2 \cdot (x_2 - 8) + 3 \cdot (x_4 + 3) &= 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_4 + 13 &= 0\,. \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme do uvedeného vzorce

$$d(A, \rho) = \frac{|6 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) + 13|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{14}{7} = 2\,.$$

Příklad 4.6:
Zjistěte vzdálenost bodu $A = [7, 1, 5, -1]$ od nadroviny $\rho = [-4, 5, 6, 3] + \langle (-5, 2, 3, 0), (10, 2, 0, 1), (1, 0, 3, -1) \rangle$.

řešení:
Nadrovinu máme zadanou pomocí bodu $B = [-4, 5, 6, 3]$ a tří vektorů $\vec{u} = (-5, 2, 3, 0)$, $\vec{v} = (10, 2, 0, 1)$ a $\vec{w} = (1, 0, 3, -1)$, tedy parametricky. Zbývá převést toto vyjádření na obecnou rovnici. Nejprve najdeme vektor $\vec{\nu}$ kolmý na nadrovinu, tedy kolmý na vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, (tento vektor $\vec{\nu}$ určuje tzv. ortogonální doplněk $\rho^{\perp}$ nadroviny ρ). Řešíme tedy soustavu rovnic zadanou následující maticí

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 & 0 \\ 10 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 18 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho^{\perp} = \langle (0, -3, 2, 6) \rangle\,.$$

Známe-li bod $B = [-4, 5, 6, 3]$ nadroviny a vektor $\vec{\nu} = (0, -3, 2, 6)$ na ni kolmý, umíme napsat její obecnou rovnici

$$\nu_1 \cdot (x_1 - b_1) + \nu_2 \cdot (x_2 - b_2) + \nu_3 \cdot (x_3 - b_3) + \nu_4 \cdot (x_4 - b_4) = 0\,,$$

neboli po dosazení a úpravě

$$\begin{aligned} -3 \cdot (x_2 - 5) + 2 \cdot (x_3 - 6) + 6 \cdot (x_4 - 3) &= 0 \\ -3x_2 + 2x_3 + 6x_4 - 15 &= 0\,. \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme do uvedeného vzorce

$$d(A, \rho) = \frac{|-3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 6 \cdot (-1) - 15|}{\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2}} = \frac{14}{7} = 2\,.$$

Příklad 4.7:
Zjistěte vzdálenost bodu $A = [2, 2, -7, 2]$ od nadroviny $\rho = [-3, -5, 9, 5] + \langle (2, 4, 5, 0), (0, 2, 2, -1), (7, 0, -2, 7) \rangle$.

řešení:
Nadrovinu máme zadanou pomocí bodu $B = [-3, -5, 9, 5]$ a tří vektorů $\vec{u} = (2, 4, 5, 0)$, $\vec{v} = (0, 2, 2, -1)$ a $\vec{w} = (7, 0, -2, 7)$, tedy parametricky. Zbývá převést toto vyjádření na obecnou rovnici. Nejprve najdeme vektor $\vec{\nu}$ kolmý na nadrovinu, tedy kolmý na vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$, (tento vektor $\vec{\nu}$ určuje tzv. ortogonální doplněk $\rho^\perp$ nadroviny ρ). Řešíme tedy soustavu rovnic zadanou následující maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 7 & 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 28 & 39 & -14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \rho^\perp = \langle (2, -1, 0, -2) \rangle\ .$$

Známe-li bod $B = [-3, -5, 9, 5]$ nadroviny a vektor $\vec{\nu} = (2, -1, 0, -2)$ na ni kolmý, umíme napsat její obecnou rovnici

$$\nu_1 \cdot (x_1 - b_1) + \nu_2 \cdot (x_2 - b_2) + \nu_3 \cdot (x_3 - b_3) + \nu_4 \cdot (x_4 - b_4) = 0\,,$$

neboli po dosazení a úpravě

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x_1 + 3) - 1 \cdot (x_2 + 5) - 2 \cdot (x_4 - 5) &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 + 11 &= 0\,. \end{aligned}$$

Nakonec dosadíme do uvedeného vzorce

$$d(A, \rho) = \frac{|2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 11|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{3} = 3\,.$$

5. Vlastní čísla matice

Některé vektory po vynásobení maticí A nezmění svůj směr, změní se (případně) pouze jejich velikost. Takové (nenulové) vektory nazýváme **vlastní vektory** matice A a koeficientům změny jejich velikosti pak říkáme **vlastní čísla** matice A. Jinak vyjádřeno, vektor $\vec{u} \neq \vec{0}$ je vlastním vektorem matice A příslušný vlastnímu číslu λ této matice, právě když platí

$$A\vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}\ .$$

V následujících příkladech tedy hledáme taková čísla λ, pro něž rovnice $A\vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}$ nebo

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

má nenulové řešení, což nastává právě když matice $A - \lambda E$ je singulární, neboli $\det(A - \lambda E) = 0$. Jak uvidíme, při hledání vlastních čísel matice typu 3×3 je nezbytné vyřešit kubickou rovnici, což bývá často poněkud obtížné. Příklady tedy budeme volit tak, aby při řešení kubické rovnice nevznikaly problémy. Navíc si ukážeme, jak výhodně lze postupovat již při počítání determinantu tak, aby kubickou rovnici nebylo třeba řešit.

Příklad 5.1:
Zjistěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & -6 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}\ .$$

řešení:
Vypočítáme determinant matice $A - \lambda E$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 1 & 6 \\ 4 & -2-\lambda & -6 \\ -4 & 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= -\underbrace{(\lambda+5)(\lambda+2)(\lambda-5)}_{=\lambda^3+2\lambda^2-25\lambda-50} + 24 + 24 - 24(\lambda+2) - 6(\lambda+5) + 4(\lambda-5) = -\lambda(\lambda+1)^2\ .$$

Vlastní čísla matice A jsou pak kořeny rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$ neboli

$$-\lambda(\lambda+1)^2 = 0\,, \qquad \text{což dává } \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1 \text{ (dvojnásobný kořen)}\,.$$

Do soustavy lineárních rovnic $A - \lambda E = 0$ dosadíme nejprve vlastní číslo $\lambda_1 = 0$ a vyřešíme vzniklou soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & -6 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -5 & 1 & 6 & 0 \\ -4 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$(x, y, z) = t \cdot (1, -1, 1)\ .$$

Nulovou pravou stranu opět zpravidla vynecháváme a upravujeme

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 6 \\ 4 & -2 & -6 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ,$$

odkud přímo zjistíme vektor $(1, -1, 1)$.

Podobně pak dosadíme $\lambda_2 = -1$ a vypočítáme příslušné vlastní vektory

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 6 & 0 \\ 4 & -1 & -6 & 0 \\ -4 & 1 & 6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (x, y, z) = t \cdot (1, 4, 0) + s \cdot (6, 0, 4)\,,$$

opět budeme vynechávat nulovou pravou stranu.

Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ přísluší tedy vlastní vektor $\vec{u}_1 = (1, -1, 1)$ a vlastnímu číslu $\lambda_2 = -1$ přísluší vlastní vektory $\vec{u}_2 = (1, 4, 0)$ a $\vec{u}_3 = (6, 0, 4)$.

Poznamenejme, že determinant lze počítat také jinak. Z lineární algebry víme, že přičteme-li ve čtvercové matici násobek jednoho řádku k jinému, determinant se nezmění, stejně tak pro sloupce. Toho můžeme s výhodou využít i při počítání $\det(A-\lambda E)$. V následujících úpravách nejprve přičteme druhý řádek ke třetímu a v dalším kroku pak druhý sloupec odečteme od třetího, pak užijeme rozvoj podle třetího řádku

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 1 & 6 \\ 4 & -2-\lambda & -6 \\ -4 & 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 1 & 6 \\ 4 & -2-\lambda & -6 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 1 & 5 \\ 4 & -2-\lambda & \lambda-4 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \end{pmatrix} = (\lambda+1)\cdot\det\begin{pmatrix} -5-\lambda & 5 \\ 4 & \lambda-4 \end{pmatrix} = (\lambda+1)(-\lambda^2-\lambda+20-20) = -\lambda(\lambda+1)^2\,.$$

Tímto postupem lze často počítat vlastní čísla i bez nutnosti řešit kubickou rovnici.

Příklad 5.2:
Zjistěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & -1 & -8 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}\,.$$

řešení:
Vypočítáme determinant matice $A - \lambda E$

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & 4 \\ 6 & -1-\lambda & -8 \\ -3 & 1 & 5-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\underbrace{(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-5)}_{=\lambda^3-2\lambda^2-13\lambda-10} + 24 + 24 - 12(\lambda+1) - 8(\lambda+2) + 6(\lambda-5) = -\lambda(\lambda-1)^2\,.$$

Vlastní čísla matice A jsou pak kořeny rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$ neboli

$$-\lambda(\lambda-1)^2 = 0\,, \qquad \text{což dává } \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 \text{ (dvojnásobný kořen)}\,.$$

Do soustavy lineárních rovnic $A - \lambda E = 0$ dosadíme nejprve vlastní číslo $\lambda_1 = 0$ a vyřešíme vzniklou soustavu

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & -1 & -8 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) = t\cdot(1, -2, 1)\ .$$

Podobně pak dosadíme $\lambda_2 = 1$ a vypočítáme příslušné vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 6 & -2 & -8 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (x, y, z) = t\cdot(0, 4, -1) + s\cdot(1, 3, 0)\,.$$

Vlastnímu číslu $\lambda_1 = 0$ přísluší tedy vlastní vektor $\vec{u}_1 = (1, -2, 1)$ a vlastnímu číslu $\lambda_2 = 1$ přísluší vlastní vektory $\vec{u}_2 = (0, 4, -1)$ a $\vec{u}_3 = (1, 3, 0)$.

Příklad 5.3:
Zjistěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\,.$$

řešení:
Vypočítáme determinant matice $A - \lambda E$

$$\det(A-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ -5 & 1-\lambda & 8 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\underbrace{(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2)}_{=\lambda^3-3\lambda++2} - 2(\lambda-1) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)\,.$$

Vlastní čísla matice A jsou pak kořeny rovnice $\det(A-\lambda E)=0$ neboli

$$-\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)=0\,, \quad \text{což dává } \lambda_1=0, \quad \lambda_2=1, \quad \text{a } \lambda_3=-1\,.$$

Do soustavy lineárních rovnic $A-\lambda E=0$ dosadíme nejprve vlastní číslo $\lambda_1=0$ a vyřešíme vzniklou soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (x,y,z)=t\cdot(2,2,1)\,.$$

Podobně pak dosadíme $\lambda_2=1$ a vypočítáme příslušný vlastní vektor

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -5 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (x,y,z)=t\cdot(0,1,0),\ .$$

Nakonec dosadíme $\lambda_3=-1$ a vypočítáme příslušný vlastní vektor

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (x,y,z)=t\cdot(2,-3,2)\,.$$

Vlastnímu číslu $\lambda_1=0$ přísluší tedy vlastní vektor $\vec{u}_1=(2,2,1)$, vlastnímu číslu $\lambda_2=1$ vlastní vektor $\vec{u}_2=(0,1,0)$ a vlastnímu číslu $\lambda_3=-1$ pak vlastní vektor $\vec{u}_3=(2,-3,2)$.

Příklad 5.4:
Zjistěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 8 & -27 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

řešení:
Vypočítáme determinant matice $A-\lambda E$

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 8 & -27 & 1-\lambda \end{pmatrix}=$$

$$= -\underbrace{(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)}_{\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2} + 8 - 81 + 24(\lambda+1) - 27(\lambda-2) + \lambda - 1 = -(\lambda^2+1)(\lambda-2)\,,$$

Vlastní čísla matice A jsou pak kořeny rovnice $\det(A-\lambda E)=0$ neboli

$$(\lambda-2)(\lambda^2+1)=0 \quad , \text{a tedy} \quad \lambda=2\,.$$

Při výpočtu determinantu lze (podobně jako v předchozích příkladech) užít vhodné řádkové a sloupcové úpravy, abychom dostali rozklad, (zkuste).

Do soustavy lineárních rovnic $A-\lambda E=0$ dosadíme toto vlastní číslo $\lambda=2$ a vyřešíme vzniklou soustavu

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 8 & -27 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (x,y,z)=t\cdot(10,3,-1)$$

Vlastnímu číslu $\lambda = 2$ přísluší vlastní vektor $\vec{u} = (10, 3, -1)$.

Příklad 5.5:
Zjistěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -65 & 56 \\ 6 & -33 & 26 \\ 6 & -30 & 23 \end{pmatrix} .$$

řešení:
Vypočítáme determinant matice $A - \lambda E$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -65 & 56 \\ 6 & -33-\lambda & 26 \\ 6 & -30 & 23-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -65 & 56 \\ 6 & -33-\lambda & 26 \\ 0 & \lambda+3 & -\lambda-3 \end{pmatrix} =$$
$$= \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -65 & -9 \\ 6 & -33-\lambda & -\lambda-7 \\ 0 & \lambda+3 & 0 \end{pmatrix} = -(\lambda+3) \cdot \det \begin{pmatrix} 8-\lambda & -9 \\ 6 & -\lambda-7 \end{pmatrix} =$$
$$= -(\lambda+3)(\lambda^2 - \lambda - 2) = -(\lambda+3)(\lambda+1)(\lambda-2) ,$$

v úpravách jsme nejprve odečetli druhý řádek od třetího a v dalším kroku jsme pak druhý sloupec přičetli ke třetímu. Vlastní čísla matice A jsou pak kořeny rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$ neboli

$$\lambda_1 = -3 , \quad \lambda_2 = -1 , \quad \lambda_3 = 2 .$$

Do soustavy lineárních rovnic $A - \lambda E = 0$ dosadíme nejprve vlastní číslo $\lambda_1 = -3$ a vyřešíme vzniklou soustavu

$$\begin{pmatrix} 11 & -65 & 56 \\ 6 & -30 & 26 \\ 6 & -30 & 26 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -15 & 13 \\ 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 05 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_1 = (1, -5, -6) .$$

Podobně pak dosadíme $\lambda_2 = -1$ a vypočítáme příslušné vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 9 & -65 & 56 \\ 6 & -32 & 26 \\ 6 & -30 & 24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = (1, 1, 1) .$$

Nakonec stejně dosadíme $\lambda_3 = 2$ a vypočítáme příslušný vlastní vektor

$$\begin{pmatrix} 6 & -65 & 56 \\ 6 & -35 & 26 \\ 6 & -30 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -10 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = (3, 2, 2) .$$

Příklad 5.6:
Zjistěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 103 & -87 \\ -6 & 81 & -71 \\ -6 & 84 & -74 \end{pmatrix} .$$

řešení:
Vypočítáme determinant matice $A - \lambda E$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -10-\lambda & 103 & -87 \\ -6 & 81-\lambda & -71 \\ -6 & 84 & -74-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -10-\lambda & 103 & -87 \\ -6 & 81-\lambda & -71 \\ 0 & \lambda+3 & -3-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= \det \begin{pmatrix} -10-\lambda & 103 & 16 \\ -6 & 81-\lambda & 10-\lambda \\ 0 & \lambda+3 & 0 \end{pmatrix} = -(\lambda+3) \cdot \det \begin{pmatrix} -10-\lambda & 16 \\ -6 & 10-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= -(\lambda+3)(\lambda^2 - 4) = -(\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda-2) ,$$

v úpravách jsme nejprve odečetli druhý řádek od třetího a v dalším kroku jsme pak druhý sloupec přičetli ke třetímu. Vlastní čísla matice A jsou pak kořeny rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$ neboli

$$\lambda_1 = -3\,, \quad \lambda_2 = -2\,, \quad \lambda_3 = 2\,.$$

Do soustavy lineárních rovnic $A - \lambda E = 0$ dosadíme nejprve vlastní číslo $\lambda_1 = -3$ a vyřešíme vzniklou soustavu

$$\begin{pmatrix} -7 & 103 & -87 \\ -6 & 84 & -71 \\ -6 & 84 & -71 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -19 & 16 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_1 = (1, -5, -6)\ .$$

Podobně pak dosadíme $\lambda_2 = -2$ a vypočítáme příslušný vlastní vektor

$$\begin{pmatrix} -8 & 103 & -87 \\ -6 & 83 & -71 \\ -6 & 84 & -72 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_2 = (2, 1, 1)\ .$$

Nakonec stejně dosadíme $\lambda_3 = 2$ a vypočítáme příslušný vlastní vektor

$$\begin{pmatrix} -12 & 103 & -87 \\ -6 & 79 & -71 \\ -6 & 84 & -76 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = (4, 3, 3)\ .$$

Příklad 5.7:
Zjistěte vlastní čísla a vlastní vektory matice

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 24 & 36 \\ -54 & -103 & -162 \\ 30 & 60 & 95 \end{pmatrix}\ .$$

řešení:
Vypočítáme determinant matice $A - \lambda E$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 17-\lambda & 24 & 36 \\ -54 & -103-\lambda & -162 \\ 30 & 60 & 95-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 17-\lambda & 2\lambda-10 & 36 \\ -54 & 5-\lambda & -162 \\ 30 & 0 & 95-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -91-\lambda & 0 & -288 \\ -54 & 5-\lambda & -162 \\ 30 & 0 & 95-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -91-\lambda & -288 \\ 30 & 95-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(\lambda-5)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = -(\lambda+1)(\lambda-5)^2\,,$$

v úpravách jsme nejprve odečetli dvojnásobek prvního sloupce od druhého a v dalším kroku jsme pak dvojnásobek druhého řádku přičetli k prvnímu. Vlastní čísla matice A jsou pak kořeny rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$ neboli

$$-(\lambda+1)(\lambda-5)^2 = 0\,, \qquad \text{což dává } \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 5 \text{ (dvojnásobný kořen)}\,.$$

Do soustavy lineárních rovnic $A - \lambda E = 0$ dosadíme nejprve vlastní číslo $\lambda_1 = -1$ a vyřešíme vzniklou soustavu

$$\begin{pmatrix} 18 & 25 & 36 \\ -54 & -102 & -162 \\ 30 & 60 & 96 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x, y, z) = t \cdot (2, -9, 5)\ .$$

Podobně pak dosadíme $\lambda_2 = 5$ a vypočítáme příslušné vlastní vektory

$$\begin{pmatrix} 12 & 24 & 36 \\ -546 & -108 & -162 \\ 30 & 60 & 90 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (x, y, z) = t \cdot (3, 0, -1) + s \cdot (2, -1, 0)\,.$$

Vlastnímu číslu $\lambda_1 = -1$ přísluší tedy vlastní vektor $\vec{u}_1 = (2, -9, 5)$ a vlastnímu číslu $\lambda_2 = 5$ přísluší vlastní vektory $\vec{u}_2 = (3, 0, -1)$ a $\vec{u}_3 = (2, -1, 0)$.

6. Objem a obsah pomocí vnějšího a vektorového součinu

Pro výpočet obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ užijeme vnějšího součinu

$$P = |[\vec{u}, \vec{v}]| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \right| ,$$

obsah trojúhelníka je pak polovina této hodnoty.

Obsah rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vypočítáme pomocí vektorového součinu

$$S = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left| (\det \begin{pmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix}) \right| ,$$

obsah trojúhelníka je opět polovina této hodnoty.

Pro výpočet objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ užijeme vnějšího součinu

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \left| \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right| ,$$

objem čtyřstěnu je šestina této hodnoty.

Příklad 6.1:
Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC, kde $A = [2, 1]$, $B = [3, 5]$ a $C = [-2, 3]$.

řešení:
Proložíme body A, B a C vektory $\vec{u} = B - A = (1, 4)$ a $\vec{v} = C - A = (-4, 2)$. Vypočítáme jejich vnější součin (pomocí determinantu)

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = 2 + 16 = 18 .$$

Obsah tojúhelníka ABC je pak polovina absolutní hodnoty vnějšího součinu

$$P = \frac{1}{2} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}]| = 9 .$$

Příklad 6.2:
Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$, kde $A = [0, 2, 3]$, $B = [1, 0, 2]$, $C = [2, -3, 4]$ a $D = [4, -1, 2]$.

řešení:
Proložíme body A, B, C a D vektory $\vec{u} = B - A = (1, -2, -1)$, $\vec{v} = C - A = (2, -5, 1)$ a $\vec{w} = D - A = (4, -3, -1)$. Vypočítáme jejich vnější součin (pomocí determinantu)

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 5 - 8 + 6 - 20 + 3 - 4 = -18 .$$

Objem čtyřstěnu $ABCD$ je pak šestina absolutní hodnoty vnějšího součinu

$$V = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 3 .$$

Příklad 6.3:
Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$, kde $A = [1, -2, 3]$, $B = [0, 1, 1]$, $C = [5, 3, 2]$ a $D = [3, 0, 1]$.

řešení:
Proložíme body A, B, C a D vektory $\vec{u} = B - A = (-1, 3, -2)$, $\vec{v} = C - A = (4, 5, -1)$ a $\vec{w} = D - A = (2, 2, -2)$.

Vypočítáme jejich vnější součin (pomocí determinantu)

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 10 - 6 - 16 + 20 - 2 + 24 = 30\,.$$

Objem čtyřstěnu $ABCD$ je pak šestina absolutní hodnoty vnějšího součinu

$$V = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 5\,.$$

Příklad 6.4:
Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$, kde $A = [2, 1, 2]$, $B = [1, -1, 0]$, $C = [1, 2, -1]$ a $D = [3, 0, -3]$.

řešení:
Proložíme body A, B, C a D vektory $\vec{u} = B - A = (-1, -2, -2)$, $\vec{v} = C - A = (-1, 1, -3)$ a $\vec{w} = D - A = (1, -1, -5)$. Vypočítáme jejich vnější součin (pomocí determinantu)

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} = 5 + 6 - 2 + 2 + 3 + 10 = 24\,.$$

Objem čtyřstěnu $ABCD$ je pak šestina absolutní hodnoty vnějšího součinu

$$V = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 4\,.$$

Příklad 6.5:
Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$, kde $A = [2, 3, -1]$, $B = [4, 2, -2]$, $C = [1, 3, 5]$ a $D = [-2, 7, 3]$.

řešení:
Proložíme body A, B, C a D vektory $\vec{u} = B - A = (2, -1, -1)$, $\vec{v} = C - A = (-1, 0, 6)$ a $\vec{w} = D - A = (-4, 4, 4)$. Vypočítáme jejich vnější součin (pomocí determinantu)

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 6 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 0 + 4 + 24 - 0 - 48 - 4 = -24\,.$$

Objem čtyřstěnu $ABCD$ je pak šestina absolutní hodnoty vnějšího součinu

$$V = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = 4\,.$$

Příklad 6.6:
Vypočítejte objem čtyřstěnu $ABCD$, kde $A = [5, 2, 1]$, $B = [3, 3, -2]$, $C = [5, -1, 2]$ a $D = [1, 2, -2]$.

řešení:
Proložíme body A, B, C a D vektory $\vec{u} = B - A = (-2, 1, -3)$, $\vec{v} = C - A = (0, -3, 1)$ a $\vec{w} = D - A = (-4, 0, -3)$. Vypočítáme jejich vnější součin (pomocí determinantu)

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \\ -4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = -18 - 4 + 36 = 14\,.$$

Objem čtyřstěnu $ABCD$ je pak šestina absolutní hodnoty vnějšího součinu

$$V = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}\,.$$

Příklad 6.7:
Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, kde $A = [3, -2, 5]$, $B = [4, -2, 8]$ a $C = [7, 0, 14]$.

řešení:
Proložíme body A, B a C vektory $\vec{u} = B - A = (1, 0, 3)$ a $\vec{v} = C - A = (4, 2, 9)$. Vypočítáme jejich vektorový součin

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(\det \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right) = (-6, 3, 2) .$$

Obsah trojúhelníku je pak polovina velikosti vektorového součinu

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \times \vec{v}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{49} = \frac{7}{2} .$$

7. Gradient, divergence a rotace

Gradient funkce h a **divergenci** a **rotaci** vektorové funkce počítáme s výhodou pomocí formálních vzorců

$$\operatorname{grad} h = \nabla h \qquad \operatorname{div} \vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} \qquad \operatorname{rot} \vec{f} = \nabla \times \vec{f}\ ,$$

využívajících Hamiltonova (nabla) operátoru

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)\ ,$$

skalárního a vektorového součinu.

Příklad 7.1:
Vypočítejte $\operatorname{grad} h(A)$, kde

$$h(x,y,z) = \frac{1}{4}x^3y^2z \quad \text{a} \quad A = [1,-2,3]\ .$$

řešení:

$$\operatorname{grad} h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \left(\frac{3}{4}x^2y^2z, \frac{1}{2}x^3yz, \frac{1}{4}x^3y^2 \right) \qquad \operatorname{grad} h(A) = (9,-3,1)$$

Příklad 7.2:
Vypočítejte $\operatorname{grad} h(A)$, kde

$$h(x,y,z) = \frac{4}{z} \cdot \sqrt{x \ln y} \quad \text{a} \quad A = [1,\mathrm{e},2]\ .$$

řešení:

$$\operatorname{grad} h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \left(\frac{2}{z} \cdot \sqrt{\frac{\ln y}{x}}, \frac{2}{yz} \cdot \sqrt{\frac{x}{\ln y}}, -\frac{4 \cdot \sqrt{x \ln y}}{z^2} \right) \qquad \operatorname{grad} h(A) = \left(1, \frac{1}{\mathrm{e}}, -1 \right)$$

Příklad 7.3:
Vypočítejte $\operatorname{grad} h(A)$, kde

$$h(x,y,z) = \operatorname{tg}(xyz) \quad \text{a} \quad A = [1,\pi,2]\ .$$

řešení:

$$\operatorname{grad} h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right) = \left(\frac{yz}{\cos^2(xyz)}, \frac{xz}{\cos^2(xyz)}, \frac{xy}{\cos^2(xyz)}, \right) \qquad \operatorname{grad} h(A) = (2\pi, 2, \pi)$$

Příklad 7.4:
Vypočítejte $\operatorname{div} \vec{f}(A)$ a $\operatorname{rot} \vec{f}(A)$, kde

$$\vec{f}(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y) \quad \text{a} \quad A = \left[\sqrt{2}, \pi, e \right]\ .$$

řešení:

$$\operatorname{div}\vec{f}=\nabla\cdot\vec{f}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(y+z,x+z,x+y)=0 \qquad \operatorname{div}\vec{f}(A)=0$$

$$\operatorname{rot}\vec{f}=\nabla\times\vec{f}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(y+z,x+z,x+y)=(1-1,1-1,1-1)=(0,0,0)\,\operatorname{rot}\vec{f}(A)=(0,0,0)$$

Příklad 7.5:
Vypočítejte $\operatorname{div}\vec{f}(A)$ a $\operatorname{rot}\vec{f}(A)$, kde

$$\vec{f}(x,y,z)=\left(3x^3yz,2xy^2z,xyz\right) \quad \text{a} \quad A=[-1,2,1]\,.$$

řešení:

$$\operatorname{div}\vec{f}=\nabla\cdot\vec{f}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(3x^3yz,2xy^2z,xyz\right)=9x^2yz+4xyz+xy\,\operatorname{div}\vec{f}(A)=18-8-2=8$$

$$\operatorname{rot}\vec{f}=\nabla\times\vec{f}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(3x^3yz,2xy^2z,xyz\right)=\left(xz-2xy^2,-yz+3x^3y,2y^2z-3x^3z\right)$$

$$\operatorname{rot}\vec{f}(A)=(-1+8,-2-6,8+3)=(7,-8,11)$$

Příklad 7.6:
Vypočítejte $\operatorname{div}\vec{f}(A)$ a $\operatorname{rot}\vec{f}(A)$, kde

$$\vec{f}(x,y,z)=(\sin(y+z),\sin(x+z),\sin(x+y)) \quad \text{a} \quad A=\left[0,\frac{\pi}{2},0\right]\,.$$

řešení:

$$\operatorname{div}\vec{f}=\nabla\cdot\vec{f}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\sin(y+z),\sin(x+z),\sin(x+y))=0$$

$$\operatorname{rot}\vec{f}=\nabla\times\vec{f}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\sin(y+z),\sin(x+z),\sin(x+y))=$$
$$=(\cos(x+y)-\cos(x+z),-\cos(x+y)+\cos(y+z),\cos(x+z)-\cos(y+z))$$
$$\operatorname{rot}\vec{f}(A)=\left(\cos\frac{\pi}{2}-\cos 0,-\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2},\cos 0-\cos\frac{\pi}{2}\right)=(-1,0,1)$$

Příklad 7.7:
Vypočítejte $\operatorname{div}\vec{f}(A)$ a $\operatorname{rot}\vec{f}(A)$, kde

$$\vec{f}(x,y,z)=\left(yz\sqrt{x^2+3},xz\sqrt{y^2-5},xy\sqrt{z^2+5}\right) \quad \text{a} \quad A=[1,-3,2]\,.$$

řešení:

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla\cdot\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(yz\sqrt{x^2+3}, xz\sqrt{y^2-5}, xy\sqrt{z^2+5}\right) =$$
$$= \frac{xyz}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{xyz}{\sqrt{y^2-5}} + \frac{xyz}{\sqrt{z^2+5}} \qquad \operatorname{div}\vec{f}(A) = -3-3-2 = -8$$

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \nabla\times\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(yz\sqrt{x^2+3}, xz\sqrt{y^2-5}, xy\sqrt{z^2+5}\right) =$$
$$= \left(x\sqrt{z^2+5} - x\sqrt{y^2-5}, y\sqrt{x^2+3} - y\sqrt{z^2+5}, z\sqrt{y^2-5} - z\sqrt{x^2+3}\right)$$
$$\operatorname{rot}\vec{f}(A) = (3-2, -6+9, 4-4) = (1,3,0)$$

Příklad 7.8:
Vypočítejte $\operatorname{div}\vec{f}(A)$ a $\operatorname{rot}\vec{f}(A)$, kde

$$\vec{f}(x,y,z) = (x\ln(y+z), 3y\ln(x+z), 2z\ln(x+y)) \qquad \text{a} \qquad A = [0,2,3]\ .$$

řešení:

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla\cdot\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x\ln(y+z), 3y\ln(x+z), 2\ln(x+y)) =$$
$$= \ln(y+z) + 3\ln(x+z) + 2z\ln(x+y)$$
$$\operatorname{div}\vec{f}(A) = \ln 5 + 3\ln 3 + 2\ln 2 = \ln\left(5\cdot 3^3\cdot 2^2\right) = \ln 540$$

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \nabla\times\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(x\ln(y+z), 3y\ln(x+z), 2z\ln(x+y)) =$$
$$= \left(\frac{2z}{x+y} - \frac{3y}{x+z}, \frac{x}{y+z} - \frac{2z}{x+y}, \frac{3y}{x+z} - \frac{x}{y+z}\right)$$
$$\operatorname{rot}\vec{f}(A) = (3-2, 0-3, 2-0) = (1,-3,2)$$

Příklad 7.9:
Vypočítejte $\operatorname{div}\vec{f}(A)$ a $\operatorname{rot}\vec{f}(A)$, kde

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(16z\sqrt{\frac{x}{y}}, 6\frac{\sqrt{xy}}{z}, -xy\sqrt{z}\right) \qquad \text{a} \qquad A = [9,4,1]\ .$$

řešení:

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla\cdot\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(16z\sqrt{\frac{x}{y}}, 6\frac{\sqrt{xy}}{z}, -xy\sqrt{z}\right) = 8\frac{z}{\sqrt{xy}} + 3\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{z} - \frac{xy}{2\sqrt{z}}$$
$$\operatorname{div}\vec{f}(A) = \frac{8}{6} + \frac{9}{2} - \frac{36}{2} = -\frac{73}{6}$$

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \nabla\times\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(16z\sqrt{\frac{x}{y}}, 6\frac{\sqrt{xy}}{z}, -xy\sqrt{z}\right) =$$
$$= \left(-x\sqrt{z}+6\sqrt{xy}\cdot\frac{1}{z^2}, y\sqrt{z}+16\sqrt{\frac{x}{y}}, 3\sqrt{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{z}+8\frac{z}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$
$$\operatorname{rot}\vec{f}(A) = \left(-9+36, 4+16\cdot\frac{3}{2}, 3\cdot\frac{2}{3}+8\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}\right) = (27,28,5)$$

Příklad 7.10:
Vypočítejte $\operatorname{div}\vec{f}(A)$ a $\operatorname{rot}\vec{f}(A)$, kde

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(\mathrm{e}^{x^2}, \mathrm{e}^{y^2}, \mathrm{e}^{z^2}\right) \quad \text{a} \quad A = [1,0,1]\ .$$

řešení:

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla\cdot\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{x^2}, \mathrm{e}^{y^2}, \mathrm{e}^{z^2}\right) = 2x\mathrm{e}^{x^2}+2y\mathrm{e}^{y^2}+2z\mathrm{e}^{z^2} \qquad \operatorname{div}\vec{f}(A) = 2\mathrm{e}+2\mathrm{e} = 4\mathrm{e}$$

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \nabla\times\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\mathrm{e}^{x^2}, \mathrm{e}^{y^2}, \mathrm{e}^{z^2}\right) = (0,0,0) \qquad \operatorname{rot}\vec{f}(A) = (0,0,0)$$

Příklad 7.11:
Vypočítejte $\operatorname{div}\vec{f}(A)$ a $\operatorname{rot}\vec{f}(A)$, kde

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}, \mathrm{e}^{\frac{z}{x}}, \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right) \quad \text{a} \quad A = [1,1,1]\ .$$

řešení:

$$\operatorname{div}\vec{f} = \nabla\cdot\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}, \mathrm{e}^{\frac{z}{x}}, \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right) = 0 \qquad \operatorname{div}\vec{f}(A) = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{f} = \nabla\times\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}, \mathrm{e}^{\frac{z}{x}}, \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}\right) = \left(-\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}-\frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{z}{x}}, -\frac{1}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}-\frac{y}{z^2}\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}, -\frac{z}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{z}{x}}-\frac{1}{z}\mathrm{e}^{\frac{y}{z}}\right)$$
$$\operatorname{rot}\vec{f}(A) = (-2\mathrm{e},-2\mathrm{e},-2\mathrm{e})$$

Příklad 7.12:
Vypočítejte $\operatorname{div}\vec{f}(A)$ a $\operatorname{rot}\vec{f}(A)$, kde

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(\ln x^2y, \ln y^2z, \ln z^2x\right) \quad \text{a} \quad A = [1,2,1]\ .$$

řešení:

$$\vec{f}(x,y,z) = (2\ln x+\ln y, 2\ln y+\ln z, 2\ln z+\ln x)$$

$$\operatorname{div} \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (2\ln x + \ln y, 2\ln y + \ln z, 2\ln z + \ln x) = \frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} \qquad \operatorname{div} \vec{f}(A) = 2 + 1 + 2 = 5$$

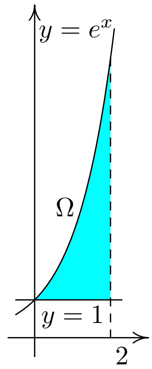
$$\operatorname{rot} \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (2\ln x + \ln y, 2\ln y + \ln z, 2\ln z + \ln x) = \left(-\frac{1}{z}, -\frac{1}{x}, -\frac{1}{y}\right)$$

$$\operatorname{rot} \vec{f}(A) = \left(-1, -1, -\frac{1}{2}\right)$$

8. Dvojný a trojný integrál

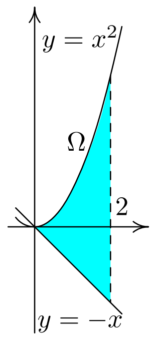
Při výpočtech vícenásobných integrálů budeme užívat zejména Fubiniovu větu (viz [1], [2], [3], [7]).

Příklad 8.1:
Vypočítejte dvojný integrál
$$\iint_\Omega \left(x+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\,dxdy\ ,$$
kde oblast $\Omega=\{[x,y];\ x\le 2,\ 1\le y\le \mathrm{e}^x\}$.



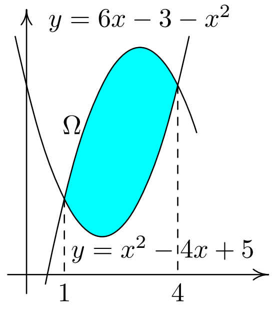
řešení:
Nakreslíme si oblast Ω a užijeme Fubiniovu větu.
$$\iint_\Omega \left(x+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\,dxdy=\int_0^2 \underbrace{\left(\int_1^{\mathrm{e}^x}\left(x+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)dy\right)}_{=\left[xy+2\sqrt{y}\right]_{y:=1}^{y:=\mathrm{e}^x}=x\mathrm{e}^x+2\sqrt{\mathrm{e}^x}-x-2}\ dy=$$
$$=\int_0^2\left(x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-x-2\right)dx=\left[(x-1)\mathrm{e}^x+4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_0^2=\mathrm{e}^2+4\mathrm{e}-9\ .$$

Příklad 8.2:
Vypočítejte dvojný integrál
$$\iint_\Omega xy^2\,dxdy\ ,$$
kde oblast $\Omega=\{[x,y];\ 0\le x\le 2,\ -x\le y\le x^2\}$.



řešení:
Nakreslíme si oblast Ω a užijeme Fubiniovu větu.
$$\iint_\Omega xy^2\,dxdy=\int_0^2 \underbrace{\left(\int_{-x}^{x^2} xy^2\,dy\right)}_{=\left[x\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{y:=-x}^{y:=x^2}=\frac{1}{3}(x^7+x^4)}\ dx=$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^2\left(x^7+x^4\right)dx=\frac{1}{3}\left[\frac{x^8}{8}+\frac{x^5}{5}\right]_0^2=\frac{64}{5}=12,8\ .$$
Poznamenejme, že Fubiniovu větu by bylo možné použít i v opačném pořadí integrace (přičemž oblast Ω rozdělíme na dvě části)
$$\iint_\Omega xy^2\,dxdy=\int_0^4\left(\int_{\sqrt{y}}^2 xy^2\,dx\right)dx+\int_{-2}^0\left(\int_{-y}^2 xy^2\,dx\right)dx\ .$$

Příklad 8.3:
Vypočítejte dvojný integrál
$$\iint_\Omega \frac{1}{x}\,dxdy\ ,$$
kde oblast $\Omega=\{[x,y];\ x^2-4x+5\le y\le 6x-3-x^2\}$.

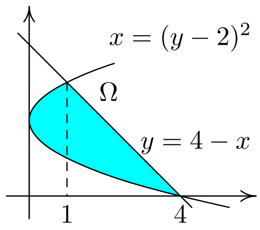


řešení:
Nakreslíme si oblast Ω. Potřebujeme zjistit průsečíky funkcí $y=x^2-4x+5$ a $y=6x-3-x^2$, což vede na rovnici
$$x^2-4x+5=6x-3-x^2\qquad x^2-5x+4=0\quad \text{s kořeny}\quad 1 \text{ a } 4\ .$$
K výpočtu použijeme opět Fubiniovu větu
$$\iint_\Omega \frac{1}{x}\,dxdy=\int_1^4\left(\int_{x^2-4x+5}^{-x^2+6x-3}\frac{1}{x}\,dy\right)dx=$$
$$=\int_1^4\left(-2x+10-\frac{8}{x}\right)dx=\left[-x^2+10x-8\ln x\right]_1^4=15-16\ln 2\ .$$

Příklad 8.4:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega x\,dxdy\ ,$$

kde oblast $\Omega = \{[x,y];\ (y-2)^2 \le x \le 4-y\}$.



řešení:
Nakreslíme si oblast Ω a rozdělíme ji na dvě části Ω_1 a Ω_2.
Horní a dolní „okraj“ oblasti Ω_1 je zadán funkcemi $y = 2 \pm \sqrt{x}$, k výpočtu použijeme opět Fubiniovu větu

$$\iint_{\Omega_1} x\,dxdy = \int_0^1 \underbrace{\left(\int_{2-\sqrt{x}}^{2+\sqrt{x}} x\,dy\right)}_{=[xy]_{y:=2-\sqrt{x}}^{y:=2+\sqrt{x}}=2x\sqrt{x}} dx = 2\int_0^1 x\sqrt{x}\,dx = \frac{4}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{5}\ .$$

Horní „okraj“ oblasti Ω_2 je zadán funkcí $y = 4-x$ a dolní „okraj“ oblasti Ω_2 je popsán funkcí $y = 2-\sqrt{x}$, k výpočtu použijeme opět Fubiniovu větu

$$\iint_{\Omega_2} x\,dxdy = \int_1^4 \underbrace{\left(\int_{2-\sqrt{x}}^{4-x} x\,dy\right)}_{=[xy]_{y:=2-\sqrt{x}}^{y:=4-x}=x(2-x+\sqrt{x})} dx = \int_1^4 (2x - x^2 + x\sqrt{x})\,dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right]_1^4 = \frac{32}{5}\ .$$

Celkově tedy

$$\iint_\Omega x\,dxdy = \iint_{\Omega_1} x\,dxdy + \iint_{\Omega_2} x\,dxdy = \frac{4}{5} + \frac{32}{5} = \frac{36}{5} = 7,2$$

V dalších příkladech budeme užívat větu o substituci

$$\iint_\Omega f\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} (f\circ\Phi)\cdot|\det D\Phi|\;du\,dv\ ,$$

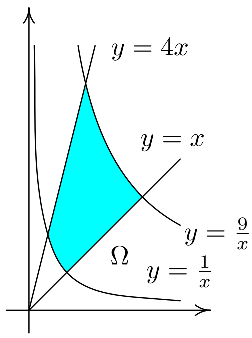
kde

$$\Phi:\quad \begin{array}{l} x = \Phi_1(u,v) \\ y = \Phi_2(u,v) \end{array}\ .$$

Příklad 8.5:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{1}{y\sqrt{x}}\,dxdy\ ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Užijeme větu o substituci pro transformaci souřadnic

$$\Phi:\quad \begin{array}{l} x = u\cdot v \\ y = \frac{u}{v} \end{array}\ .$$

Protože jakobián je

$$|\det D\Phi(u,v)| = \left|\det\begin{pmatrix} v & \frac{1}{v} \\ u & -\frac{u}{v^2}\end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{u}{v} - \frac{u}{v}\right| = 2\frac{u}{v}\ ,$$

dostaneme

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f\,(u,v)\cdot\frac{2u}{v}\,dudv\ .$$

Pro hranici oblasti Ω dostaneme transformací souřadnic

$$\begin{array}{cccc} y = 4x & \frac{u}{v} = 4uv & v^2 = \frac{1}{4} & v = \frac{1}{2}\ , \\ y = x & \frac{u}{v} = uv & v^2 = 1 & v = 1\ , \\ y = \frac{9}{x} & \frac{u}{v} = \frac{9}{uv} & u^2 = 9 & u = 3\ , \\ y = \frac{1}{x} & \frac{u}{v} = \frac{1}{uv} & u^2 = 1 & u = 1\ , \end{array}$$

(volíme kladné u, v), proto vzor množiny Ω při uvedené transformaci bude obdélník $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 3\rangle \times \langle \frac{1}{2}, 1\rangle$. Nyní už stačí dosadit a vypočítat

$$\iint_\Omega \frac{1}{y\sqrt{x}}\,dxdy = \iint_{\langle 1,3\rangle\times\langle\frac{1}{2},1\rangle} \frac{1}{\frac{u}{v}\sqrt{uv}} \cdot \frac{2u}{v}\,dudv =$$

$$= 2\iint_{\langle 1,3\rangle\times\langle\frac{1}{2},1\rangle} \frac{dudv}{\sqrt{uv}} = 2\int_1^3 \frac{du}{\sqrt{u}}\cdot\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dv}{\sqrt{v}} = 8\left[\sqrt{u}\right]_1^3\cdot\left[\sqrt{v}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = 8\left(\sqrt{3}-1\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{2}-1)\,.$$

V dalších příkladech budeme užívat větu o substituci pro polární souřadnice

$$\Phi: \quad \begin{array}{l} x = r\cos t \\ \underline{y = r\sin t} \end{array} \;.$$

Protože

$$|\det D\Phi| = \left|\det\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -r\sin t & r\cos t\end{pmatrix}\right| = \left|r\cos^2 t + r\sin^2 t\right| = r\;,$$

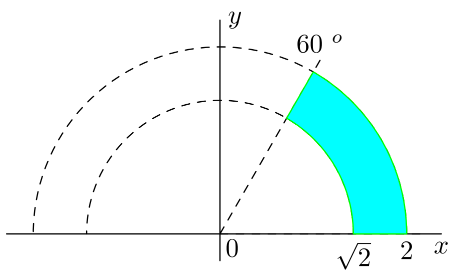
dostaneme

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos t, r\sin t)\cdot r\,du\,dv\;. \qquad (*)$$

Příklad 8.6:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{y}{x}\,dxdy\;,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \left\langle\sqrt{2}, 2\right\rangle \times \left\langle 0, \frac{\pi}{3}\right\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega \frac{y}{x}\,dxdy = \iint_{\left\langle\sqrt{2},2\right\rangle\times\left\langle 0,\frac{\pi}{3}\right\rangle} r\;\frac{\sin t}{\cos t}\,drdt = \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^2 r\,dr}_{=1}\cdot\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t}\,dt}_{=\ln 2} = \ln 2\,.$$

Uvedeme výpočty jednotlivých integrálů

$$\int_{\sqrt{2}}^2 r\,dr = \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{2}}^2 = 2-1 = 1\,,$$

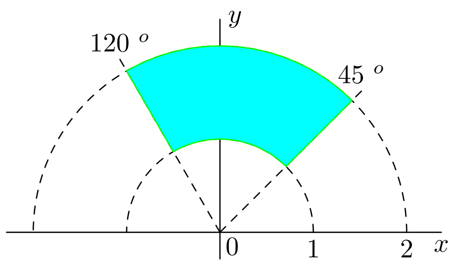
$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t}\,dt = \int_1^{\frac{1}{2}} -\frac{dw}{w} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dw}{w} = \left[\ln|w|\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 2\,,$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t\,dt\;,\quad 0 \rightsquigarrow 1\;$ a $\quad \frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$.

Příklad 8.7:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega x^2y\,dxdy\;,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 2\rangle \times \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega x^2y\,dxdy = \iint_{\langle 1,2\rangle\times\left\langle\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right\rangle} r^4\;\sin t\cos^2 t\,drdt = \underbrace{\int_1^2 r^4\,dr}_{=\frac{31}{5}}\cdot\underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t\cos^2 t\,dt}_{=\frac{1}{24}\left(2\sqrt{2}+1\right)} = \frac{31}{120}\left(2\sqrt{2}+1\right)\;.$$

Uvedeme výpočty jednotlivých integrálů

$$\int_1^2 r^4\,dr = \left[\frac{r^5}{5}\right]_1^2 = \frac{31}{5}\,,$$

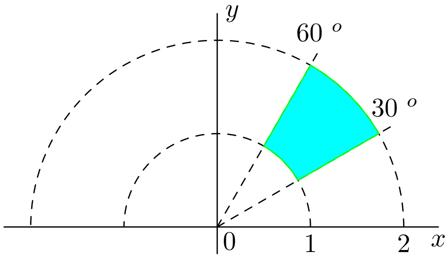
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos^2 t\sin t\,dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{1}{2}} -w^2\,dw = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} w^2\,dw = \frac{1}{3}\left[w^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{24}\left(2\sqrt{2}+1\right)\,,$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t\,dt\,,\quad \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\frac{2\pi}{3} \rightsquigarrow -\frac{1}{2}$.

Příklad 8.8:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega x^2y^2\,dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,2\rangle \times \left\langle\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega x^2y^2\,dxdy = \iint_{\langle 1,2\rangle\times\left\langle\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right\rangle} r^5\ \cos^2 t\sin^2 t\,drdt = \underbrace{\int_1^2 r^5\,dr}_{=\frac{21}{2}}\cdot\underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^2 t\sin^2 t\,dt}_{=\frac{1}{96}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)} = \frac{7}{64}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)\,.$$

Uvedeme výpočty jednotlivých integrálů

$$\int_1^2 r^5\,dr = \left[\frac{r^6}{6}\right]_1^2 = \frac{63}{6} = \frac{21}{2}\,,$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2t)^2\,dt = \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^2 w\,dw =$$

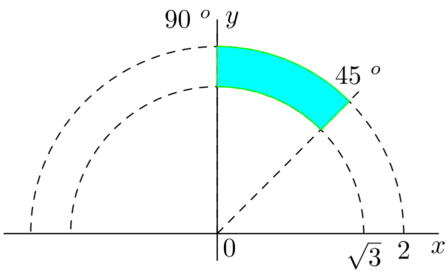
$$= \frac{1}{16}\left[w-\sin w\cos w\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{16}\left(\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right) = \frac{1}{16}(\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{96}\left(2\pi+3\sqrt{3}\right)\,,$$

užili jsme vzorec $\sin 2t = 2\sin t\cos t$, substituci $w := 2t$, a tedy $\frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\pi}{3}$ a $\frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{2\pi}{3}$ a vztah $\sin^2 w\,dw = \frac{1}{2}(w-\sin w\cos w)+c$, který lze získat například metodou per partes.

Příklad 8.9:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\,dxdy\,,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \left\langle\sqrt{3},2\right\rangle \times \left\langle\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega \frac{x}{y^2}\,dxdy = \iint_{\langle\sqrt{3},2\rangle\times\left\langle\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right\rangle} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,drdt = \underbrace{\int_{\sqrt{3}}^2 1\,dr}_{=2-\sqrt{3}}\cdot\underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt}_{=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)\right)\,.$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

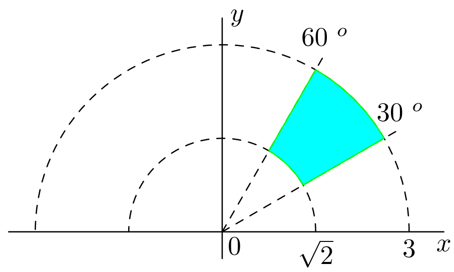
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{dw}{w^2} = \left[-\frac{1}{w}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \frac{2}{\sqrt{2}}-1 = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\,,$$

užili jsme substituci $w := \sin t$, a tedy $\quad dw = \cos t\,dt\,,\quad \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1$.

Příklad 8.10:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2}\, dxdy \ ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle\sqrt{2}, 3\rangle \times \langle\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega \frac{y}{x^2}\, dxdy = \iint_{\langle\sqrt{2},3\rangle\times\langle\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\rangle} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, drdt = \underbrace{\int_{\sqrt{2}}^{3} 1\, dr}_{=3-\sqrt{2}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt}_{=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-1)} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(3-\sqrt{2})(\sqrt{3}-1)\,.$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

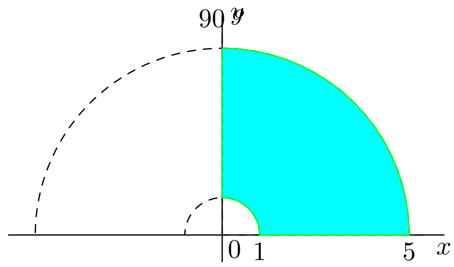
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos^2 t}\, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dw}{w^2} = \left[-\frac{1}{w}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} + 2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}-1\right)\,,$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t\, dt\ , \quad \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \ $ a $\ \frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$.

Příklad 8.11:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+2y^2}\, dxdy \ ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 5\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega \frac{x}{x^2+2y^2}\, dxdy = \iint_{\langle 1,5\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \frac{r\cos t}{r^2\cos^2 t + 2r^2\sin^2 t}\, r\, drdt = \underbrace{\int_1^5 1\, dr}_{=4} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\, dt}_{=\frac{\pi}{4}} = \pi\,.$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

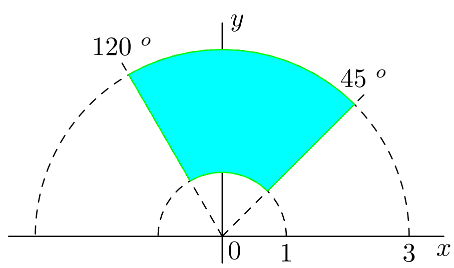
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}\, dt = \int_0^1 \frac{1}{1+w^2}\, dw = [\operatorname{arctg} w]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,,$$

užili jsme substituci $w := \sin t$, a tedy $\quad dw = \cos t\, dt\ , \quad 0 \rightsquigarrow 0 \ $ a $\ \frac{\pi}{2} \rightsquigarrow 1$.

Příklad 8.12:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega xy\, dxdy \ ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 3\rangle \times \langle\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega xy\, dxdy = \iint_{\langle 1,3\rangle\times\langle\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\rangle} r^3 \sin t\cos t\, drdt = \underbrace{\int_1^3 r^3\, dr}_{=\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^3=20} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t\cos t\, dt}_{=\frac{1}{8}} = \frac{5}{2}\,.$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

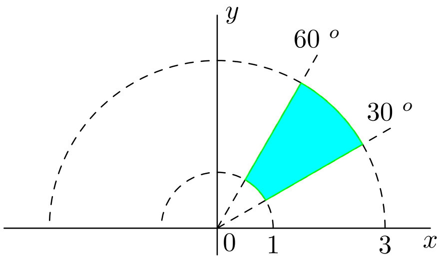
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos t \, dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{1}{2}} -w \, dw = \left[\frac{w^2}{2}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \, ,$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t \, dt \, , \quad \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\quad \frac{2\pi}{3} \rightsquigarrow -\frac{1}{2}$.

Příklad 8.13:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega y \ln x \, dxdy \ ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 3\rangle \times \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega y \ln x \, dxdy = \iint_{\langle 1,3\rangle \times \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\rangle} r^2 \sin t \ln (r \cos t) \ drdt = \iint_{\langle 1,3\rangle \times \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\rangle} r^2 \sin t \,(\ln r + \ln \cos t) \ drdt =$$

$$= \underbrace{\int_1^3 r^2 \ln r \, dr}_{=\frac{1}{9}(81 \ln 3 - 26)} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \, dt}_{=[-\cos t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)} + \underbrace{\int_1^3 r^2 \, dr}_{=\left[\frac{1}{3}r^3\right]_1^3 = \frac{26}{3}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \ln \cos t \, dt}_{=\frac{1}{2}\left((1-\sqrt{3})(1+\ln 2) + \frac{1}{2}\sqrt{3} \ln 3\right)} =$$

$$= \frac{1}{18}(81 \ln 3 - 26) \cdot (\sqrt{3} - 1) + \frac{26}{3} \cdot \frac{1}{2}\left((1 - \sqrt{3})(1 + \ln 2) + \frac{1}{2}\sqrt{3} \ln 3\right) =$$

$$= (\sqrt{3} - 1)\left(-\frac{52}{9} + \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{13}{3}\ln 2\right) + \frac{13}{6}\sqrt{3} \ln 3 \, .$$

Uvedeme výpočet prvního a posledního integrálu (zbylé dva jsou zřejmé)

$$\int_1^3 r^2 \ln r \, dr = \left[\frac{r^3}{3} \ln r\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{r^3}{3} \frac{1}{r} \, dw = 9 \ln 3 - \frac{1}{3} \int_1^3 \frac{r^2}{=}$$

$$= 9 \ln 3 - \frac{1}{9}\left[r^3\right]_1^3 = 9 \ln 3 - 3 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}(81 \ln 3 - 26) \, ,$$

užili jsme integraci "po částech (per partes)" pro $f(r) := \ln r$ a $g'(r) := r^2$, pak $f'(r) := \frac{1}{r}$ a $g(r) := \frac{r^3}{3}$,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \ln \cos t \, dt = \int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}} -\ln w \, dw = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \ln w \, dw == \frac{\sqrt{3}}{2} \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} =$$

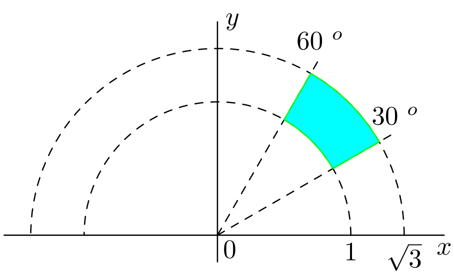
$$= \frac{1}{2}\left((1 - \sqrt{3})(1 + \ln 2) + \frac{1}{2}\sqrt{3} \ln 3\right) \, ,$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t \, dt \, , \quad \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\quad \frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$, dále pak užijeme vztah $\int \ln w \, dw = w \ln w - w + c$, který lze získat metodou "po částech (per partes)".

Příklad 8.14:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_\Omega xy^2 \, dxdy \ ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \left\langle 1, \sqrt{3}\right\rangle \times \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_\Omega xy^2 \, dxdy = \iint_{\left\langle 1, \sqrt{3}\right\rangle \times \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\rangle} r^4 \sin^2 t \cos t \, drdt = \underbrace{\int_1^{\sqrt{3}} r^4 \, dr}_{=\frac{9\sqrt{3}-1}{5}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t \, dt}_{=\frac{1}{24}(3\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{60}(41 - 6\sqrt{3}) \, .$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

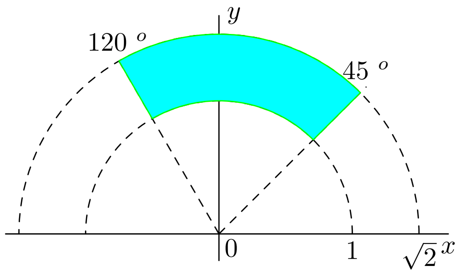
$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 t \cos t \, dt = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} w^2 \, dw = \left[\frac{w^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}(3\sqrt{3} - 1) \,,$$

užili jsme substituci $w := \sin t$, a tedy $\quad dw = \cos t \, dt \,, \quad \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{1}{2}$ a $\quad \frac{\pi}{3} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Příklad 8.15:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} x^2 y \, dxdy \ ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \left\langle 1, \sqrt{2} \right\rangle \times \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \right\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_{\Omega} x^2 y \, dxdy = \iint_{\left\langle 1,\sqrt{2}\right\rangle \times \left\langle \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \right\rangle} r^4 \sin t \cos^2 t \, drdt = \underbrace{\int_1^{\sqrt{2}} r^4 \, dr}_{=\frac{1}{5}(4\sqrt{2}-1)} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos^2 t \, dt}_{=\frac{1}{24}(2\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{120}(15 + 2\sqrt{2}) \,.$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

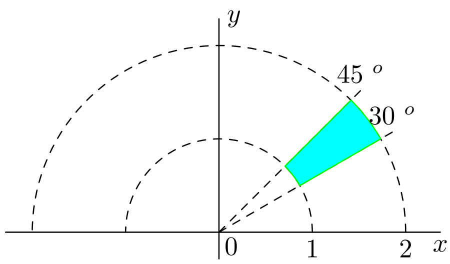
$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin t \cos^2 t \, dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{-\frac{1}{2}} -w^2 \, dw = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} w^2 \, dw = \left[\frac{w^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{24} \left(2\sqrt{2} + 1 \right) \,,$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t \, dt \,, \quad \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\quad \frac{2\pi}{3} \rightsquigarrow -\frac{1}{2}$.

Příklad 8.16:
Vypočítejte dvojný integrál

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{x^2 y} \, dxdy \ ,$$

kde oblast Ω je nakreslena na vedlejším obrázku.



řešení:
Zjistíme vzor oblasti Ω při převodu do polárních souřadnic $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1, 2 \rangle \times \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ a užijeme $(*)$

$$\iint_{\Omega} xy \, dxdy = \iint_{\langle 1,2\rangle \times \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right\rangle} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\sin t \cos^2 t} \, drdt = \underbrace{\int_1^2 \frac{1}{r^2} \, dr}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t \, dt}{(1 - \cos^2 t) \cos^2 t}}_{=\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln(2+\sqrt{3}) - \ln(1+\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{2} - 1) \,.$$

Uvedeme výpočet druhého integrálu (první je zřejmý)

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t \, dt}{(1 - \cos^2 t) \cos^2 t} \, dt = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dw}{(1 - w^2) w^2} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{2}{w^2} + \frac{1}{w+1} - \frac{1}{w-1} \right) dw =$$

$$= \left[-\frac{1}{w} \right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{1}{2} \left[\ln \frac{1+w}{1-w} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \ln(2 + \sqrt{3}) - \ln(1 + \sqrt{2}) \,,$$

užili jsme substituci $w := \cos t$, a tedy $\quad dw = -\sin t\, dt\ , \quad \frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$ a $\frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Na závěr uvedeme příklady na užití sférických (kulových) souřadnic pro výpočet trojného integrálu.

$$\Phi: \quad \begin{array}{l} x = r\cos t\sin s \\ y = r\sin t\sin s \\ z = r\cos s \end{array} \qquad 0 \le r,\ 0 \le t < 2\pi,\ 0 \le s \le \pi\ .$$

Protože

$$|\det D\Phi| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos t\sin s & \sin t\sin s & \cos s \\ -r\sin t\sin s & r\cos t\sin s & 0 \\ r\cos t\ sins & r\sin t\cos t & -r\sin s \end{pmatrix}\right| = r^2\sin s\ ,$$

dostaneme

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Phi^{-1}(\Omega)} f(r\cos t\sin s, r\sin t\sin s, r\cos s)\cdot r^2\sin s\,dr\,dt\,ds\ .$$

Poznamenejme, že v některých učebnicích se užívá odlišný tvar sférických souřadnic

$$\Phi: \quad \begin{array}{l} x = r\cos t\cos s \\ y = r\sin t\cos s \\ z = r\sin s \end{array} \qquad 0 \le r,\ 0 \le t < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \le s \le \frac{\pi}{2}\ ,$$

pak ovšem vychází $|\det D\Phi| = r^2\cos s$.

Příklad 8.17:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz \quad , \text{kde } \Omega = \{[x,y,z];\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\}\ .$$

řešení:

Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu Ω nám dává $1 \le r \le 3$, z dalších tří podmínek dostáváme $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ a $0 \le s \le \frac{\pi}{2}$, neboli $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,3\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\iiint_\Omega \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdydz = \iiint_{\langle 1,3\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \frac{r\cos s}{\sqrt{r^2\cos^2 t\sin^2 s + r^2\sin^2 t\sin^2 s}}\cdot r^2\sin s\,dr\,dt\,ds =$$

$$= \int_1^3 r^2\,dr\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos s\,ds = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3\cdot[t]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot[\sin s]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{13}{3}\pi\,.$$

Příklad 8.18:

Vypočítejte trojný integrál

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)z\,dxdydz \quad , \text{kde } \Omega = \{[x,y,z];\ 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le z^2,\ z \ge 0,\}\ .$$

řešení:

Převedeme do sférických souřadnic. První podmínka vymezující množinu Ω nám dává $1 \le r \le 2$. Z druhé podmínky dostaneme $r^2\sin^2 s \le r^2\cos^2 s$, neboli $|\operatorname{tg} s| \le 1$, což spolu s třetí podmínkou dává $0 \le s \le \frac{\pi}{4}$. Na proměnnou t není kladen žádný požadavek, a tedy $\Phi^{-1}(\Omega) = \langle 1,2\rangle \times \langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle$. Dosadíme a vypočteme

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2)z\,dxdydz = \iiint_{\langle 1,2\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle} \left(r^2\cos^2 t\sin^2 s + r^2\sin^2 t\sin^2 s\right)\cdot r\cos s\cdot r^2\sin s\,dr\,dt\,ds =$$

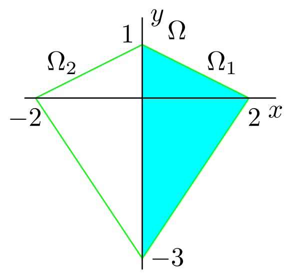
$$= \iiint_{\langle 1,2\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{4}\rangle} r^5\sin^3 s\cos s\,dr\,dt\,ds = \underbrace{\int_1^2 r^5\,dr}_{=\frac{21}{2}}\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi} 1\,dt}_{=2\pi}\cdot\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 s\cos s\,ds}_{=\frac{1}{4}} = \frac{21}{4}\pi\,.$$

Uvedeme výpočet třetího integrálu (ostatní jsou zřejmé)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 s \cos s \, ds = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} w^3 \, dw = \left[\frac{w^4}{4}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{4} \, ,$$

užili jsme substituci $w := \sin s$, a tedy $\quad dw = \cos s \, ds \, , \quad 0 \rightsquigarrow 0$ a $\quad \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Příklad 8.19:
Zjistěte souřadnice těžiště rovinného útvaru na obrázku (je-li hmota rozložena stejnoměrně, neboli hustota je konstatní $\rho(x, y) = 1$).



řešení:
Nejprve vyjádříme jednotlivé části hranice Ω pomocí funkčních vztahů

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 \quad \text{(1. kvadrant)} \qquad y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \text{(2. kvadrant)}$$
$$y = -\frac{3}{2}x - 3 \quad \text{(3. kvadrant)} \qquad y = \frac{3}{2}x - 3 \quad \text{(4. kvadrant)} \, .$$

Protože útvar na obrázku je symetrický podle osy y, první souřadnice těžiště je zřejmě nulová $x_T = 0$.

Pro výpočet druhé souřadnice budeme potřebovat dvojné integrály

$$m = \iint_{\Omega} 1 \, dxdy = 2 \iint_{\Omega_1} 1 \, dxdy \, , \quad \text{a} \quad M_y = \iint_{\Omega} y \, dxdy = \iint_{\Omega_1} y \, dxdy + \iint_{\Omega_2} y \, dxdy \, ,$$

první integrál vyjadřuje hmotnost, druhý tzv. statický moment. Převedeme tedy dvojný integrál na dvojnásobný pomocí Fubiniovy věty a dopočítáme

$$m = 2 \iint_{\Omega_1} 1 \, dxdy = 2 \int_0^2 \left(\int_{\frac{3}{2}x-3}^{1-\frac{1}{2}x} 1 \, dy \right) dx = 2 \int_0^2 \underbrace{\left((1 - \frac{1}{2}x) - (\frac{3}{2}x - 3) \right)}_{=-2x+4} dx =$$
$$= 4 \int_0^2 (2 - x) \, dx = 4 \left[2x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 = 8 \, .$$

(Hmotnost můžeme vypočítat též pomocí vzorců pro obsah trojúhelníka.)

V případě druhého integrálu postupujeme podobně

$$\iint_{\Omega_1} y \, dxdy = \int_0^2 \underbrace{\left(\int_{\frac{3}{2}x-3}^{1-\frac{1}{2}x} y \, dy \right)}_{=\left[\frac{1}{2}y^2\right]_{\frac{3}{2}x-3}^{1-\frac{1}{2}x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \underbrace{\left((1 - \frac{1}{2}x)^2 - (\frac{3}{2}x - 3)^2 \right)}_{=-2x^2+8x-8} dx =$$
$$= \int_0^2 (-x^2 + 4x - 4) \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 4x \right]_0^2 = -\frac{8}{3} \, ,$$

integrál přes Ω_2 je vzhledem k symetrii roven integrálu přes Ω_1; můžeme se přesvědčit též výpočtem

$$\iint_{\Omega_2} y \, dxdy = \int_{-2}^0 \left(\int_{-\frac{3}{2}x-3}^{1+\frac{1}{2}x} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \left((1 + \frac{1}{2}x)^2 - (\frac{3}{2}x + 3)^2 \right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x^2 - 4x - 4) \, dx = -\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 4x \right]_{-2}^0 = -\frac{8}{3} \, .$$

Odtud máme

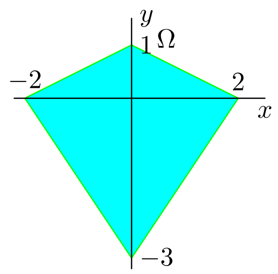
$$M_y = \iint_{\Omega} y \, dxdy = -\frac{16}{3} \, .$$

Druhou souřadnici těžiště dostaneme jako podíl

$$y_T = \frac{M_y}{m} = \frac{-\frac{16}{3}}{8} = -\frac{2}{3}\,.$$

Těžiště rovinného útvaru je tedy $T = [0, -\frac{2}{3}]$.

Příklad 8.20:
Zjistěte souřadnice těžiště rovinné desky ve tvaru rovinného útvaru na obrázku, jejíž hustota je $\rho(x, y) = \frac{y+3}{4}$.



řešení:
Jednotlivé části hranice Ω máme vyjádřeny pomocí funkčních vztahů již z předchozího příkladu

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 \quad 1.\ \text{kvadrant} \qquad y = \frac{1}{2}x + 1 \quad 2.\ \text{kvadrant}$$
$$y = -\frac{3}{2}x - 3 \quad 3.\ \text{kvadrant} \qquad y = \frac{3}{2}x - 3 \quad 4.\ \text{kvadrant}\,.$$

Protože útvar na obrázku je symetrický podle osy y a hustota je vzhledem k proměnné x konstantní (nezávisí na ní), první souřadnice těžiště je opět zřejmě nulová $x_T = 0$ (lze se přesvědčit výpočtem).

Pro výpočet druhé souřadnice budeme potřebovat hmotnost

$$m = \iint_\Omega \rho(x, y)\,dxdy = \iint_\Omega \frac{y+3}{4}\,dxdy = 2\iint_{\Omega_1} \frac{y+3}{4}\,dxdy$$

a statický moment

$$M_y = \iint_\Omega y\rho(x, y)\,dxdy = \iint_\Omega y\frac{y+3}{4}\,dxdy = 2\iint_{\Omega_1} y\frac{y+3}{4}\,dxdy$$

(opět jsme využili symetrie). Převedeme na dvojnásobné integrály pomocí Fubiniovy věty a dopočítáme

$$m = 2\iint_{\Omega_1} \frac{y+3}{4}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\int_{\frac{3}{2}x-3}^{1-\frac{1}{2}x} (y+3)\ dy\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\frac{1}{2}y^2 + 3y\right]_{\frac{3}{2}x-3}^{1-\frac{1}{2}x} dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{3}{2}x-3\right)^2\right) + 3\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}x+3\right)\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^2 (8-2x-x^2)\,dx = \frac{1}{2}\left[8x - x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{2}(16-4-\frac{8}{3}) = \frac{14}{3}\,,$$

podobně v případě druhého integrálu

$$M_y = 2\iint_{\Omega_1} y\frac{y+3}{4}\,dxdy = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(\int_{\frac{3}{2}x-3}^{1-\frac{1}{2}x} (y^2+3y)\,dy\right) dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2\right]_{\frac{3}{2}x-3}^{1-\frac{1}{2}x} dx =$$
$$= \frac{1}{12}\int_0^2 \left(2\left(1-\frac{1}{2}x\right)^3 - 2\left(\frac{3}{2}x-3\right)^3 + 9\left(1-\frac{1}{2}x\right)^2 - 9\left(\frac{3}{2}x-3\right)^2\right) dx =$$
$$= \frac{1}{12}\int_0^2 (-16-12x+24x^2-7x^3)\,dx = \frac{1}{12}\left[-16x-6x^2-8x^3-\frac{7}{4}x^4\right]_0^2 = \frac{1}{12}(-32-24+64-28) = -\frac{5}{3}\,.$$

Druhá souřadnice těžiště je podíl M_y a m

$$y_T = \frac{M_y}{m} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{14}{3}} = -\frac{5}{14}\,.$$

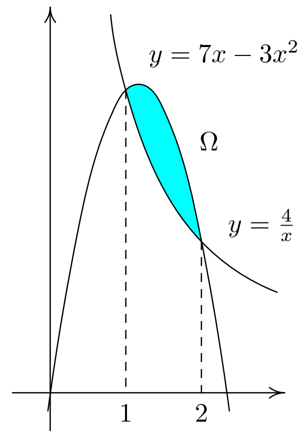
Těžiště desky je $T = [0, -\frac{5}{14}]$.

9. Objem pomocí trojného integrálu

Příklad 9.1:
Vypočítejte obsah rovinného obrazce

$$\Omega = \left\{ [x,y];\, \frac{4}{x} \le y \le 7x - 3x^2 \right\} .$$

řešení:
Obsah budeme počítat dvojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si tuto oblast nakreslíme. Její dolní „okraj“ je popsán rovnicí hyperboly $y = \frac{4}{x}$ a horní „okraj“ parabolou $y = 7x - 3x^2$. Vypočítáme průsečíky obou křivek, přičemž dostaneme kubickou rovnici



$$\frac{4}{x} = 7x - 3x^2 \qquad\qquad 3x^3 - 7x^2 + 4 = 0 ,$$

kterou obecně neumíme řešit (užívají se tzv. Cardanovy vzorce). V našem případě si uvědomíme, že jeden z kořenů bude jistě 1, proto můžeme polynom levé strany rovnice postupně rozložit

$$3x^3 - 7x^2 + 4 = (x-1)(3x^2 - 4x - 4) = (x-1)(x-2)(3x+2)$$

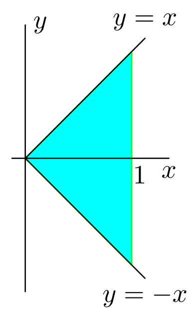
a získáme kořeny 1, 2 a $\frac{2}{3}$. Dvojný integrál pak převedeme pomocí Fubiniovy věty na dvojnásobný

$$P(\Omega) = \iint_\Omega 1\, dx\, dy = \int_1^2 (\underbrace{\int_{\frac{4}{x}}^{7x-3x^2} 1\, dy}_{=7x-3x^2-\frac{4}{x}})\, dx = \int_1^2 (7x - 3x^2 - \frac{4}{x})\, dx = \left[\frac{7}{2}x^2 - x^3 - 4\ln x \right]_1^2 = \frac{7}{2} - 4\ln 2 .$$

Příklad 9.2:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{ [x,y,z]; 0 \le x \le 1, |y| \le x, 0 \le z \le xy^2 \right\} .$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω, přičemž podmínku $|y| \le x$ přepíšeme na $-x \le y \le x$. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



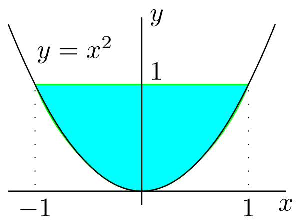
$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 (\int_{-x}^{x} (\underbrace{\int_0^{xy^2} 1\, dz}_{xy^2})\, dy)\, dx =$$

$$= \int_0^1 (\underbrace{\int_{-x}^{x} xy^2\, dy}_{\left[x\frac{y^3}{3}\right]_{y:=-x}^{y:=x} = \frac{2}{3}x^4})\, dx = \frac{2}{3} \int_0^1 x^4\, dx = \frac{2}{3} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{2}{15} .$$

Příklad 9.3:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{ [x,y,z]; 0 \le y \le 1, x^2 \le y, 0 \le z \le x^2 + y \right\} .$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω, přičemž podmínku $x^2 \leq y$ přepíšeme na $|x| \leq \sqrt{y}$ a dále na $-\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}$. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 (\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (\underbrace{\int_0^{x^2+y} 1\,dz}_{=x^2+y})\,dx)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (\underbrace{\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x^2+y)\,dx}_{=\frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}})\,dy = \frac{8}{3}\int_0^1 y^{\frac{3}{2}}\,dy = \frac{8}{3}\left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{16}{15}.$$

Uvedeme výpočet integrálu podle x

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (x^2 + y)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + yx\right]_{x:=-\sqrt{y}}^{x:=\sqrt{y}} = \frac{1}{3}y\sqrt{y} + y\sqrt{y} - \left(-\frac{1}{3}y\sqrt{y} - y\sqrt{y}\right) = \frac{8}{3}y\sqrt{y} = \frac{8}{3}y^{\frac{3}{2}}.$$

Poznamenejme ještě, že při výpočtu trojného integrálu je možné zvolit jiné pořadí integrace,

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_{-1}^1 (\underbrace{\int_{x^2}^1 (x^2+y)\,dy}_{=\left[x^2y+\frac{1}{2}y^2\right]_{y:=x^2}^{y:=1}=\frac{1}{2}+x^2-\frac{3}{2}x^4})\,dx =$$

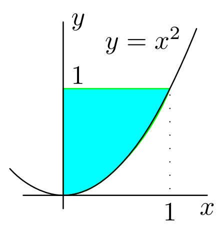
$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} + x^2 - \frac{3}{2}x^4\right)\,dx = \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{10}x^5\right]_{-1}^1 = \frac{16}{15},$$

výsledek je stejný.

Příklad 9.4:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z]; 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq z \leq x + y^2\right\}.$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω, přičemž podmínku $x \leq \sqrt{y}$ přepíšeme na $x^2 \leq y$. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 (\int_0^{\sqrt{y}} (\underbrace{\int_0^{x+y^2} 1\,dz}_{=x+y^2})\,dx)\,dy =$$

$$= \int_0^1 (\underbrace{\int_0^{\sqrt{y}} (x+y^2)\,dx}_{=\left[\frac{1}{2}x^2+xy^2\right]_{x:=0}^{x:=\sqrt{y}}=\frac{1}{2}y+y^{\frac{5}{2}}})\,dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y + y^{\frac{5}{2}}\right)\,dy = \left[\frac{1}{4}y^2 + \frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{15}{28}.$$

Poznamenejme opět, že při výpočtu trojného integrálu je možné zvolit jiné pořadí integrace,

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 (\underbrace{\int_{x^2}^1 (x+y^2)\,dy}_{=\left[xy+\frac{1}{3}y^3\right]_{y:=x^2}^{y:=1}=\frac{1}{3}+x-x^3-\frac{1}{3}x^6})\,dx =$$

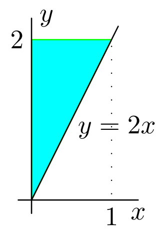
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + x - x^3 - \frac{1}{3}x^6\right)\,dx = \left[\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{21}x^7\right]_0^1 = \frac{15}{28},$$

výsledek je stejný.

Příklad 9.5:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z]; 0 \le y \le 2, 0 \le 2x \le y, 0 \le z \le y^2 - x^2\right\}.$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \Big(\int_0^{\frac{y}{2}} \big(\underbrace{\int_0^{y^2-x^2} 1\,dz}_{=y^2-x^2} \big)\,dx \Big)\,dy =$$

$$= \int_0^2 \Big(\underbrace{\int_0^{\frac{y}{2}} (y^2 - x^2)\,dx}_{=\left[y^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{x:=0}^{x:=\frac{y}{2}} = \frac{11}{24}y^3} \Big)\,dy = \frac{11}{24}\int_0^2 y^3\,dy = \frac{11}{24}\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^2 = \frac{11}{24}\cdot\frac{16}{4} = \frac{11}{6}.$$

Poznamenejme opět, že při výpočtu trojného integrálu je možné zvolit jiné pořadí integrace,

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_{2x}^2 (y^2 - x^2)\,dy}_{=\left[\frac{1}{3}y^3 - x^2y\right]_{y:=2x}^{y:=2} = \frac{8}{3} - 2x^2 - \frac{2}{3}x^3} \Big)\,dx =$$

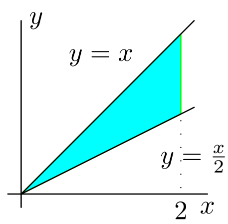
$$= \int_0^1 \left(\frac{8}{3} - 2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\,dx = \left[\frac{8}{3}x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{12}x^4\right]_0^1 = \frac{11}{6},$$

výsledek je stejný.

Příklad 9.6:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z]; 0 \le x \le 2, y \le x \le 2y, 0 \le z \le xy^2\right\}.$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



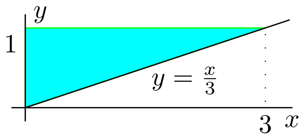
$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \Big(\int_{\frac{x}{2}}^{x} \big(\underbrace{\int_0^{xy^2} 1\,dz}_{=xy^2} \big)\,dy \Big)\,dx =$$

$$= \int_0^2 \Big(\underbrace{\int_{\frac{x}{2}}^{x} xy^2\,dy}_{=\left[x\frac{y^3}{3}\right]_{y:=\frac{x}{2}}^{y:=x} = \frac{7}{24}x^4} \Big)\,dx = \frac{7}{24}\int_0^2 x^4\,dx = \frac{7}{24}\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^2 = \frac{7}{24}\cdot\frac{32}{5} = \frac{28}{15}.$$

Příklad 9.7:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z]; 0 \le x \le 3y, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le x^2 + y^2\right\}.$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{3y} \Big(\underbrace{\int_0^{x^2+y^2} 1\,dz}_{=x^2+y^2}\Big)\,dx\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \Big(\underbrace{\int_0^{3y} (x^2+y^2)\,dx}_{=\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_{x:=0}^{x:=3y}=12y^3}\Big)\,dy = \int_0^1 12y^3\,dy = 12\left[\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = 3$$

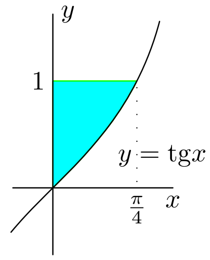
nebo jinak

$$V(\Omega) = \int_0^3 \Big(\underbrace{\int_{\frac{x}{3}}^1 (x^2+y^2)\,dy}_{=\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_{y:=\frac{x}{3}}^{y:=1}=\frac{1}{3}+x^2-\frac{28}{81}x^3}\Big)\,dx = \int_0^3 \Big(\frac{1}{3}+x^2-\frac{28}{81}x^3\Big)\,dx = \left[\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x^3-\frac{7}{81}x^4\right]_0^3 = 3\,.$$

Příklad 9.8:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z];\, 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \operatorname{arctg} y, 0 \le z \le \frac{6x}{1+y^2}\right\}.$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{\operatorname{arctg} y} \Big(\underbrace{\int_0^{\frac{6x}{1+y^2}} 1\,dz}_{=\frac{6x}{1+y^2}}\Big)\,dx\Big)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+y^2}\underbrace{\int_0^{\operatorname{arctg} y} 6x\,dx}_{=[3x^2]_{x:=0}^{x:=\operatorname{arctg} y}=3\operatorname{arctg}^2 y}\Big)\,dy = 3\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 y}{1+y^2}\,dy = 3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t^2}{1+y^2}\cdot(1+y^2)\,dt = 3\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64},$$

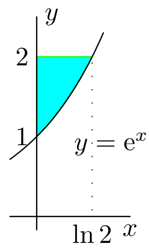
použili jsme substituci $t := \operatorname{arctg} y$, pak $dt = \frac{1}{1+y^2}\,dy$ tedy $dy = (1+y^2)\,dt$, $0 \rightsquigarrow 0$ a $1 \rightsquigarrow \frac{\pi}{4}$.
Opět lze volit jiné pořadí integrace

$$V(\Omega) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_{\operatorname{tg} x}^1 \frac{6x}{1+y^2}\,dy\Big)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x\,[\operatorname{arctg} y]_{y:=\operatorname{tg} x}^{y:=1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 6x\Big(\frac{\pi}{4}-x\Big)\,dx = \left[\frac{3}{4}\pi x^2 - 2x^3\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^3}{64},$$

neboť Ω lze charakterizovat také nerovnostmi $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ a $\operatorname{tg} x \le y \le 1$.

Příklad 9.9:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x,y,z];\, 1 \le y \le 2, 0 \le x \le \ln y, 0 \le z \le \frac{6x}{y}\right\}.$$



řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál

$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_1^2 \Big(\int_0^{\ln y} \underbrace{\Big(\int_0^{\frac{6x}{y}} 1\,dz\Big)}_{=\frac{6x}{y}} dx\Big)\,dy =$$

$$= \int_1^2 \underbrace{\Big(\int_0^{\ln y} \frac{6x}{y}\,dx\Big)}_{=\left[\frac{3x^2}{y}\right]_0^{\ln y}} dy = \int_1^2 \frac{3\ln^2 y}{y}\,dy = 3\int_0^{\ln 2} t^2\,dt = \left[t^3\right]_0^{\ln 2} = \ln^3 2\,,$$

použili jsme substituci $t := \ln y$, pak $dt = \frac{1}{y}\,dy$ tedy $dy = y\,dt$, $1 \rightsquigarrow 0$ a $2 \rightsquigarrow \ln 2$.
Opět lze volit jiné pořadí integrace

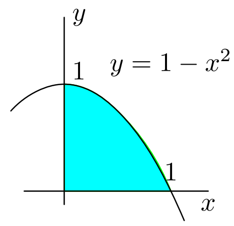
$$V(\Omega) = \int_0^{\ln 2} \Big(\int_{e^x}^2 \frac{6x}{y}\,dy\Big)\,dx = \int_0^{\ln 2} 6x\,[\ln y]_{y:=e^x}^{y:=2}\,dx = \int_0^{\ln 2} 6x(\ln 2 - x)\,dx = \left[3x^2\ln 2 - 2x^3\right]_0^{\ln 2} = \ln^3 2\,,$$

neboť Ω lze charakterizovat také nerovnostmi $0 \le x \le \ln 2$ a $e^x \le y \le 2$.

Příklad 9.10:
Vypočítejte objem tělesa

$$\Omega = \left\{[x, y, z];\, 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \sqrt{1-y}, 0 \le z \le 4xy\right\}\,.$$

řešení:
Objem budeme počítat trojným integrálem z jedničky přes oblast Ω. Nejprve si nakreslíme "podstavu" tělesa Ω, přičemž podmínku $x \le \sqrt{1-y}$ přepíšeme na $0 \le x \le 1$ a $y \le 1 - x^2$. Z obrázku pak vidíme, jak trojný integrál převést pomocí Fubiniovy věty na trojnásobný integrál



$$V(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x^2} \underbrace{\Big(\int_1^{4xy} 1\,dz\Big)}_{=4xy} dy\Big)\,dx =$$

$$= \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x^2} 4xy\,dy\Big)\,dx = \int_0^1 \left[2xy^2\right]_{y:=0}^{y:=1-x^2} dx = \int_0^1 2x(1-x^2)^2\,dx =$$

$$= \int_0^1 (2x - 4x^3 + 2x^5)\,dx = \left[x^2 - x^4 + \frac{1}{3}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Nebo v jiném pořadí

$$V(\Omega) = \int_0^1 \Big(\int_0^{\sqrt{1-y}} 4xy\,dx\Big)\,dy = \int_0^1 2y\left[x^2\right]_{x:=0}^{x:=\sqrt{1-y}} dy =$$

$$= \int_0^1 2(1-y)y\,dy = \int_0^1 (2y - 2y^2)\,dy = \left[y^2 - \frac{2}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

10. Křivkový integrál

V následujících příkladech máme zadanou křivku parametricky pomocí rovnic

$$\gamma: \quad \begin{array}{l} x = \varphi_1(t) \\ \underline{y = \varphi_2(t)} \end{array} \qquad t \in \langle \alpha, \beta \rangle .$$

Při počítání křivkových integrálů pro nás bude mít klíčový význam tečný vektor $\vec{\tau} = (\varphi_1', \varphi_2')$ a vztahy

$$ds = |\vec{\tau}|\, dt\,, \qquad \text{a} \qquad d\vec{r} = \vec{\tau}\, dt\,.$$

Příklad 10.1:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma \frac{1}{xy}\, ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (x,y)\, d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \quad \begin{array}{l} x = \sqrt{1+t} \\ \underline{y = \sqrt{1-t}} \end{array} \qquad t \in \langle 0, \tfrac{1}{2} \rangle .$$

řešení:
Nejprve vypočítáme ten správný tečný vektor

$$\vec{\tau} = \big((\sqrt{1+t})', (\sqrt{1-t})' \big) = \left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}, -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right).$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\, dt$ vypočítat druhý z integrálů

$$\int_\gamma (x,y)\, d\vec{r} = \int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{1+t}\,, \sqrt{1-t}) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}, -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right) dt = \int_0^{\frac{1}{2}} 0\, dt = 0\,.$$

Pro výpočet prvního integrálu však potřebujeme navíc ještě velikost onoho tečného vektoru

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4(1+t)} + \frac{1}{4(1-t)}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Pak dosazením do $ds = |\vec{\tau}|\, dt$ obdržíme

$$\int_\gamma \frac{1}{xy}\, ds = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+t} \cdot \sqrt{1-t}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln|1+t| - \ln|1-t| \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{1}{2} \right) = \frac{\ln 3}{2\sqrt{2}}\,.$$

Příklad 10.2:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma xy\, ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (y,-x)\, d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \quad \begin{array}{l} x = \sqrt{1+t} \\ \underline{y = \sqrt{1-t}} \end{array} \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle .$$

řešení:
Z předešlého příkladu připomeneme tečný vektor $\vec{\tau}$ a jeho velikost

$$\vec{\tau} = \left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}, -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} \right), \qquad |\vec{\tau}| = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}\,.$$

Dosazením do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\ dt$ dostaneme

$$\int_\gamma xy\,ds = \int_0^1 \sqrt{1+t}\cdot\sqrt{1-t}\cdot\frac{dt}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Výpočet druhého integrálu je trošku technicky náročnější, je však opět založen na vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\,dt$. Po dosazení máme

$$\int_\gamma (y,-x)\,d\vec{r} = \int_0^1 \left(\sqrt{1-t}\,,\,-\sqrt{1+t}\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{1+t}}\,,\,-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1\left(\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}-\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{(1+t)(1-t)}}\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1-t}\cdot\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt\,.$$

Dále použijeme substituci

$$w := \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,,\qquad \text{odkud plyne}\quad t = \frac{1-w^2}{1+w^2}\,,\quad dt = \frac{-4w\,dw}{(1+w^2)^2}\,,\quad \frac{1}{1-t} = \frac{1+w^2}{2w^2}\quad \text{a}\quad 0 \rightsquigarrow 1\,,\ 1\rightsquigarrow 0\,,$$

a pokračujeme

$$\int_0^1 \frac{1}{1-t}\cdot\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,dt = \int_1^0 \frac{1+w^2}{2w^2}\cdot w\cdot\frac{-4w}{(1+w^2)^2}\,dw = 2\int_0^1\frac{1}{1+w^2}\,dw = 2\left[\operatorname{arctg} w\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Příklad 10.3:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma \sqrt{1+y}\,ds\,,\qquad \text{kde}\qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = t+\cos t\\ \underline{y=\sin t} \end{array}\qquad t\in\langle 0,\tfrac{\pi}{2}\rangle\,.$$

řešení:
Nejprve opět vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = (\,(t+\cos t)'\,,\,(\sin t)'\,) = (\,1-\sin t\,,\,\cos t\,)$$

a jeho velikost

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(1-\sin t)^2+\cos^2 t} = \sqrt{2}\sqrt{1-\sin t}\,.$$

Dosadíme do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\ dt$ a dostaneme

$$\int_\gamma \sqrt{1+y}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin t}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\sin t}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 t}\,dt = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt = \sqrt{2}\,[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\,.$$

Příklad 10.4:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma 3x\,y^2\,ds\,,\qquad \text{kde}\qquad \gamma:\ \begin{array}{l} x = \cos t\\ \underline{y=\sin t} \end{array}\qquad t\in\langle 0,\tfrac{\pi}{2}\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor a jeho velikost

$$\vec{\tau} = (\,(\cos t)'\,,\,(\sin t)'\,) = (\,-\sin t\,,\,\cos t\,)\,,\qquad |\vec{\tau}| = \sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t} = 1\,.$$

Zbývá opět jen dosadit do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\ dt$ a dopočítat

$$\int_\gamma 3x\,y^2\,ds = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos t\,dt = 3\int_0^1 w^2\,dw = \left[w^3\right]_0^1 = 1\,,$$

užili jsme substituce $w := \sin t$.

Příklad 10.5:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^2+y^2}\,ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (x,y)\,d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = t\cos t \\ \underline{y = t\sin t} \end{array} \qquad t \in \langle 0,\pi\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = (\,(t\cos t)'\,,\,(t\sin t)'\,) = (\,\cos t - t\sin t\,,\,\sin t + t\cos t\,)\;.$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\,dt$ vypočítat druhý z integrálů

$$\int_\gamma (x,y)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (t\cos t\,,\,t\sin t)\cdot(\cos t - t\sin t\,,\,\sin t + t\cos t)\;dt = \int_0^\pi t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^\pi = \frac{1}{2}\pi^2\,.$$

Pro výpočet prvního integrálu potřebujeme navíc ještě velikost tečného vektoru

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2} =$$
$$= \sqrt{\cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t} = \sqrt{1+t^2}\,.$$

Pak dosazením do $ds = |\vec{\tau}|\;dt$ obdržíme

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^2+y^2}\,ds = \int_0^\pi \sqrt{1+t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\cdot\sqrt{1+t^2}\,dt =$$
$$= \int_0^\pi (1+t^2)\,dt = \left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^\pi = \frac{\pi}{3}\left(3+\pi^2\right)\;.$$

Příklad 10.6:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}}\,ds\;, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\cos 2t \\ \underline{y = \sin t} \end{array} \qquad t \in \langle 0,\tfrac{\pi}{2}\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor a jeho velikost

$$\vec{\tau} = \left((\frac{1}{2}\cos 2t)'\,,\,(\sin t)'\right) = (\,-\sin 2t\,,\,\cos t\,)\;, \qquad |\vec{\tau}| = \sqrt{(-\sin 2t)^2 + \cos^2 t} = \sqrt{4\sin^2 t + 1}\cdot\cos t\,.$$

Zbývá dosadit do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\;dt$ a dopočítat

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{4y^2+1}}\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4\sin^2 t+1}}\sqrt{4\sin^2 t+1}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1\,.$$

Příklad 10.7:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma (y^3,x^2)\,d\vec{r}\;, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ \underline{y = t} \end{array} \qquad t \in \langle 1,2\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor
$$\vec{\tau} = \left(\left(\frac{1}{t}\right)', \, (t)' \right) = \left(-\frac{1}{t^2}, \, 1 \right).$$
Odtud dosadíme do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\, dt$ a počítáme
$$\int_\gamma (y^3, x^2)\, d\vec{r} = \int_1^2 \left(t^3, \frac{1}{t^2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}, 1 \right) dt = \int_1^2 \left(\frac{1}{t^2} - t \right) dt = \left[-\frac{1}{t} - \frac{t^2}{2} \right]_1^2 = -1\,.$$

Příklad 10.8:
Vypočítejte křivkový integrál
$$\int_\gamma \sqrt{x + y + \frac{1}{2}}\, ds\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = t + \sqrt{t} \\ \underline{y = t - \sqrt{t}} \end{array} \qquad t \in \langle 1, 4 \rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor
$$\vec{\tau} = \left((t + \sqrt{t})', \, (t - \sqrt{t})' \right) = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{t}}, \, 1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right)$$
a jeho velikost
$$|\vec{\tau}| = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{t}} \right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{t}} \right)^2} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4t}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\,.$$
Dosadíme do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\; dt$ a dopočítáme
$$\int_\gamma \sqrt{x + y + \frac{1}{2}}\, ds = \int_1^4 \sqrt{2t + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{4t+1}{4t}}\, dt = \int_1^4 \frac{4t+1}{2\sqrt{t}}\, dt =$$
$$= 2\int_1^4 \sqrt{t}\, dt + \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \frac{4}{3}\left[t\sqrt{t} \right]_1^4 + \left[\sqrt{t} \right]_1^4 = \frac{31}{3}\,.$$

Příklad 10.9:
Vypočítejte křivkový integrál
$$\int_\gamma (y^2, -xy)\, d\vec{r}\,, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = t + \operatorname{arctg} t \\ \underline{y = \sqrt{1 + t^2}} \end{array} \qquad t \in \langle 0, 1 \rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor
$$\vec{\tau} = \left((t + \operatorname{arctg} t)', \, \left(\sqrt{1+t^2}\right)' \right) = \left(1 + \frac{1}{1+t^2}, \, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) = \left(\frac{2+t^2}{1+t^2}, \, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right).$$
Odtud dosadíme do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\, dt$ a počítáme
$$\int_\gamma (y^2, -xy)\, d\vec{r} = \int_0^1 \left(1 + t^2, -(t + \operatorname{arctg} t)\sqrt{1+t^2} \right) \cdot \left(\frac{2+t^2}{1+t^2}, \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \right) dt =$$
$$= \int_0^1 \left(2 + t^2 - t \cdot (t + \operatorname{arctg} t) \right) dt = \int_0^1 (2 - t \operatorname{arctg} t)\; dt = \underbrace{\int_0^1 2\, dt}_{=2} - \underbrace{\int_0^1 t \operatorname{arctg} t}_{=\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(10 - \pi)\,.$$

Poslední integrál řešíme metodou per partes (po částech)

$$\int_0^1 t \operatorname{arctg} t \, dt = \left[\frac{t^2+1}{2} \operatorname{arctg} t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2} \, dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \, ,$$

volili jsme za $f'(t) = t$ a $g(t) = \operatorname{arctg} t$, odtud nám vyšlo $g'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ a můžeme vzít $f(t) = \frac{t^2+1}{2}$.

Příklad 10.10:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma \frac{4xy}{\sqrt{1+4x^2}} \, ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (2y - \ln x, x^2) \, d\vec{r} \, , \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = t^2 \\ \underline{y = \ln t} \end{array} \qquad t \in \langle 1, 2 \rangle \, .$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((t^2)' \, , \, (\ln t)' \right) = \left(2t \, , \, \frac{1}{t} \right) .$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau} \, dt$ vypočítat druhý z integrálů

$$\int_\gamma (2y - \ln x, x^2) \, d\vec{r} = \int_1^2 \left(2 \ln t - \ln t^2 \, , \, t^4 \right) \cdot \left(2t \, , \, \frac{1}{t} \right) \, dt = \int_1^2 t^3 \, dt = \frac{1}{4} \left[t^4 \right]_1^2 = \frac{15}{4} \, .$$

Pro výpočet prvního integrálu potřebujeme navíc ještě velikost tečného vektoru

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(2t)^2 + \left(\frac{1}{t} \right)^2} = \sqrt{4t^2 + \frac{1}{t^2}} = \frac{1}{t} \sqrt{4t^4 + 1} \, .$$

Pak dosazením do $ds = |\vec{\tau}| \; dt$ obdržíme

$$\int_\gamma \frac{4xy}{\sqrt{1+4x^2}} \, ds = \int_1^2 \frac{4t^2 \ln t}{\sqrt{1+4t^4}} \cdot \frac{1}{t} \sqrt{1+4t^4} \, dt = \; = 4 \int_1^2 t \ln t \, dt = 2 \left[t^2 \ln t \right]_1^2 - 2 \int_1^2 t \, dt = 8 \ln 2 - 3 \, ,$$

Předposlední integrál jsme řešili metodou per partes (po částech).

Příklad 10.11:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma \frac{1}{x\sqrt{1+8y^3}} \, ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (2y, x^2) \, d\vec{r} \, , \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = \frac{1}{t} \\ \underline{y = \frac{1}{2} t^2} \end{array} \qquad t \in \langle 1, 2 \rangle \, .$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left(\left(\frac{1}{t} \right)' \, , \, \left(\frac{1}{2} t^2 \right)' \right) = \left(-\frac{1}{t^2} \, , \, t \right) .$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau} \, dt$ vypočítat druhý z integrálů

$$\int_\gamma (2y, x^2) \, d\vec{r} = \int_1^2 \left(2 \cdot \frac{1}{2} t^2 \, , \, \frac{1}{t^2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2} \, , \, t \right) \, dt = \int_1^2 \left(-1 + \frac{1}{t} \right) \, dt = \left[\ln t - t \right]_1^2 = \ln 2 - 1 \, .$$

Pro výpočet prvního integrálu potřebujeme navíc ještě velikost tečného vektoru

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{t^2} \right)^2 + t^2} = \; = \sqrt{\frac{1}{t^4} + t^2} = \frac{1}{t^2} \sqrt{1 + t^6} \, .$$

Pak dosazením do $ds = |\vec{\tau}|\; dt$ obdržíme

$$\int_\gamma \frac{1}{x\sqrt{1+8y^3}}\, ds = \int_1^2 \frac{t}{\sqrt{1+t^6}} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot \sqrt{1+t^6}\, dt = \; = \int_1^2 \frac{1}{t}\, dt = [\ln t]_1^2 = \ln 2\, .$$

Příklad 10.12:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma 3\sqrt{x^2+y^2}\, ds\;, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = t\cos t \\ \underline{y = t\sin t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\, .$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = (\,(t\cos t)'\,,\,(t\sin t)'\,) = (\,\cos t - t\sin t\,,\,\sin t + t\cos t\,)$$

a jeho velikost

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{1+t^2}\, .$$

Dosazením do $ds = |\vec{\tau}|\; dt$ obdržíme

$$\int_\gamma 3\sqrt{x^2+y^2}\, ds = \int_0^{2\pi} 3\sqrt{t^2} \cdot \sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} 2t\sqrt{1+t^2}\, dt$$

a dále použijeme substituci $w := 1+t^2$, odkud plyne $du = 2t\, dt$, $0 \rightsquigarrow 1$ a $2\pi \rightsquigarrow 1+4\pi^2$, a tedy

$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} 2t\sqrt{1+t^2}\, dt = \frac{3}{2}\int_1^{1+4\pi^2} \sqrt{w}\, dw = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[w\sqrt{w}\right]_1^{1+4\pi^2} = (1+4\pi^2)\sqrt{1+4\pi^2} - 1\, .$$

Příklad 10.13:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma \frac{16x}{\sqrt{y^4+64}}\, ds\;, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = t - \ln t \\ \underline{y = 2\sqrt{2t}} \end{array} \qquad t \in \langle 1, 3\rangle\, .$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \Big(\,(t-\ln t)'\,,\,(2\sqrt{2t})'\,\Big) = \left(1 - \frac{1}{t}\,,\,\sqrt{\frac{2}{t}}\right)$$

a jeho velikost

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{(1-\frac{1}{t})^2 + \frac{2}{t}} = \sqrt{1+\frac{1}{t^2}}\, .$$

Zbývá dosadit do vztahu $ds = |\vec{\tau}|\; dt$ a dopočítat

$$\int_\gamma \frac{16x}{\sqrt{y^4+64}}\, ds = \int_1^3 \frac{t-\ln t}{\sqrt{64t^2+64}} \cdot \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\, dt = 2\int_1^3 (1 - \frac{\ln t}{t})\, dt = \left[2t - \ln^2 t\right]_1^3 = 4 - \ln^2 3\;.$$

Příklad 10.14:
Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\, ds \quad \text{a} \quad \int_\gamma (x,y)\, d\vec{r}\;, \qquad \text{kde} \qquad \gamma: \begin{array}{l} x = \sqrt{t}\cos t \\ \underline{y = \sqrt{t}\sin t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, \pi\rangle\, .$$

řešení:
Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \Big((\sqrt{t}\cos t)' \, , \, (\sqrt{t}\sin t)' \Big) = \left(\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\sin t \, , \, \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cos t \right) .$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{r} = \vec{\tau}\, dt$ vypočítat druhý z integrálů

$$\int_\gamma (x,y)\, d\vec{r} = \int_0^\pi \Big(\sqrt{t}\cos t \, , \, \sqrt{t}\sin t\Big) \cdot \left(\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\sin t \, , \, \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cos t \right) dt =$$
$$= \int_0^\pi \left(\frac{\cos^2 t}{2} - t\sin t\cos t + \frac{\sin^2 t}{2} + t\sin t\cos t \right) = \int_0^\pi \frac{1}{2}\, dt = \frac{\pi}{2} .$$

Pro výpočet prvního integrálu potřebujeme navíc ještě velikost tečného vektoru

$$|\vec{\tau}| = \sqrt{\left(\frac{\cos t}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\sin t \right)^2 + \left(\frac{\sin t}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\cos t \right)^2} =$$
$$= \sqrt{\frac{\cos^2 t}{4t} - \sin t\cos t + t\sin^2 t + \frac{\sin^2 t}{4t} - \sin t\cos t + t\cos^2 t} = \sqrt{t + \frac{1}{4t}} = \sqrt{\frac{4t^2+1}{4t}} .$$

Pak dosazením do $ds = |\vec{\tau}|\; dt$ obdržíme

$$\int_\gamma \sqrt{x^2+y^2}\, ds = \int_0^\pi \sqrt{t} \cdot \sqrt{\frac{4t^2+1}{4t}}\, dt = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\pi \sqrt{4t^2+1}\, dt}_{=I} = \frac{1}{4}\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{8}\ln\Big(\sqrt{4\pi^2+1} + 2\pi\Big) .$$

Výpočet posledního integrálu označeného I je početně trošku náročnější a bude vhodné se u něho na okamžik zastavit. Vypočteme nejprve jiný integrál, totiž

$$\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}\, dt = -\frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{4\pi^2+1}-2\pi} \frac{2w}{1+w^2} \cdot \frac{1+w^2}{w^2}\, dw = -\frac{1}{2}\left[\ln w\right]_1^{\sqrt{4\pi^2+1}-2\pi} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\Big(\sqrt{4\pi^2+1} - 2\pi\Big) = \frac{1}{2}\ln\Big(\sqrt{4\pi^2+1} + 2\pi\Big) ,$$

použili jsme (Eulerovu) substituci danou rovností $\sqrt{4t^2+1} = 2t + w$, odkud plyne

$$t = \frac{1-w^2}{4w} \, , \quad dt = -\frac{1+w^2}{4w^2}\, dw \, , \quad \sqrt{4t^2+1} = 2t + w = \frac{1+w^2}{2w} \, , \quad 0 \rightsquigarrow 1 \text{ a } \pi \rightsquigarrow \sqrt{4\pi^2+1} - 2\pi .$$

Nyní se vrátíme k původnímu integrálu a použijeme na něj metodu per partes (po částech)

$$I = \int_0^\pi 1 \cdot \sqrt{4t^2+1}\, dt = \underbrace{\Big[t\sqrt{4t^2+1}\Big]_0^\pi}_{=\pi\sqrt{4\pi^2+1}} - \int_0^\pi \frac{4t^2}{\sqrt{4t^2+1}}\, dt =$$
$$= \pi\sqrt{4\pi^2+1} - \underbrace{\int_0^\pi \frac{4t^2+1}{\sqrt{4t^2+1}}\, dt}_{=I} + \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}}\, dt}_{=\frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{4\pi^2+1}+2\pi\right)} ,$$

zvolili jsme funkce $f'(t) = 1$ a $g(t) = \sqrt{4t^2+1}$, odtud pak máme $f(t) = t$ a $g'(t) = \frac{4t}{\sqrt{4t^2+1}}$.
Na závěr dostáváme rovnici

$$I = \pi\sqrt{4\pi^2+1} - I + \frac{1}{2}\ln\Big(\sqrt{4\pi^2+1} + 2\pi\Big) ,$$

odkud obdržíme

$$I = \frac{1}{2}\pi\sqrt{4\pi^2+1} + \frac{1}{4}\ln\Big(\sqrt{4\pi^2+1} + 2\pi\Big) .$$

11. Plošný integrál

V následujících příkladech máme zadanou plochu parametricky pomocí rovnic

$$\kappa: \quad \begin{array}{l} x = \varphi_1(u,v) \\ x = \varphi_2(u,v) \\ \underline{y = \varphi_3(u,v)} \end{array} \qquad (u,v) \in Q\,.$$

Při počítání plošných integrálů pro nás bude mít klíčový význam normálový vektor $\vec{\nu} = \vec{\tau} \times \vec{\sigma}$ (kolmý na plochu κ), který získáme jako vektorový součin dvou tečných vektorů $\vec{\tau} = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial u}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial u})$ a $\vec{\sigma} = (\frac{\partial\varphi_1}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}, \frac{\partial\varphi_3}{\partial v})$. Dále pak budeme používat vztahy

$$dS = |\vec{\nu}|\; du\, dv\,, \qquad \text{a} \qquad d\vec{S} = \vec{\nu}\, du\, dv\,.$$

Příklad 11.1:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa 2\, dS\,, \qquad \text{kde} \qquad \kappa: \quad \begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u \sin v \\ \underline{z = u^2} \end{array} \qquad u \in \langle 0,3\rangle \;\; v \in \left\langle 0, \tfrac{\pi}{2}\right\rangle\,.$$

řešení:
Nejprve vypočítáme ty správné tečné vektory, jejich vektorový součin a jeho velikost

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= (\frac{\partial}{\partial u} u\cos v, \frac{\partial}{\partial u} u \sin v, \frac{\partial}{\partial u} u^2) = (\cos v, \sin v, 2u) \\
\vec{\sigma} &= (\frac{\partial}{\partial v} u\cos v, \frac{\partial}{\partial v} u \sin v, \frac{\partial}{\partial v} u^2) = (-u\sin v, u\cos v, 0) \\
\vec{\nu} = \vec{\tau} \times \vec{\sigma} &= (\det\begin{pmatrix} \tau_2 & \tau_3 \\ \sigma_2 & \sigma_3 \end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_3 \\ \sigma_1 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 \end{pmatrix}) = (-2u^2\cos v, -2u^2 \sin v, u) \\
|\vec{\nu}| &= \sqrt{\left(-2u^2\cos v\right)^2 + \left(-2u^2 \sin v\right)^2 + \left(u\right)^2} = u\sqrt{4u^2+1}\,.
\end{aligned}$$

Odtud dosazením do vztahu $dS = |\vec{\nu}|\, du\, dv$ převedeme plošný integrál na dvojný a ten pak vypočítáme pomocí Fubiniovy věty

$$\begin{aligned}
\iint_\kappa 2\, dS = \iint_{\langle 0,3\rangle \times \left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle} 2u\sqrt{4u^2+1}\, du\, dv &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \cdot \int_0^3 2u\sqrt{4u^2+1}\, du = \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \int_1^{37} 2u\sqrt{w} \cdot \frac{dw}{8u} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{2}{3}\left[w\sqrt{w}\right]_1^{37} = \frac{\pi}{12}(37\sqrt{37}-1)\,,
\end{aligned}$$

v posledních výpočtech jsme provedli substituci $w := 4u^2+1$, odkud jsme dostali $dw = 8u\, du$, $0 \rightsquigarrow 1$ a $3 \rightsquigarrow 37$.

Příklad 11.2:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa \sqrt{4z+1}\, dS \quad \text{a} \quad \iint_\kappa (x,y,z)\, d\vec{S}\,, \qquad \text{kde} \qquad \kappa: \quad \begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u \sin v \\ \underline{z = u^2} \end{array} \qquad u \in \langle 0,2\rangle \;\; v \in \left\langle 0, \tfrac{\pi}{2}\right\rangle\,.$$

řešení:
Z předchozího příkladu připomeneme potřebné tečné vektory a jejich vektorový součin

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= (\cos v, \sin v, 2u) \\
\vec{\sigma} &= (-u\sin v, u\cos v, 0) \\
\vec{\nu} = \vec{\tau} \times \vec{\sigma} &= (-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u)\,.
\end{aligned}$$

Dosadíme do vztahu $d\vec{S} = \vec{\nu}\,du\,dv$, převedeme plošný integrál na dvojný a ten pak vypočítáme pomocí Fubiniovy věty

$$\iint_\kappa (x,y,z)\,d\vec{S} = \iint_{\langle 0,2\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} (u\cos v, u\sin v, u^2)\cdot(-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u)\,du\,dv =$$

$$= -\iint_{\langle 0,2\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} u^3\,du\,dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv\cdot\int_0^2 u^3\,du = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}\left[u^4\right]_0^2 = 2\pi\,.$$

Pro výpočet prvního integrálu připomeneme ještě velikost normálového vektoru

$$|\vec{\nu}| = u\sqrt{4u^2+1}\,.$$

Pak opět dosazením do $dS = |\vec{\nu}|\;du\,dv$ převedeme plošný integrál na dvojný a ten pak převedeme na jednoduché pomocí Fubiniovy věty

$$\iint_\kappa \sqrt{4z+1}\,dS = \iint_{\langle 0,2\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \underbrace{\sqrt{4u^2+1}\cdot u\sqrt{4u^2+1}}_{=4u^3+u}\,du\,dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv\cdot\int_0^2 (4u^3+u)\,du = \frac{\pi}{2}\cdot\left[u^4+\frac{1}{2}u^2\right]_0^2 = 9\pi\,.$$

Příklad 11.3:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa \frac{xy}{\sqrt{4z+1}}\,dS \quad \text{a} \quad \iint_\kappa (-y,x,xyz)\,d\vec{S}\,, \qquad \text{kde} \qquad \kappa:\ \begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ \underline{z = u^2} \end{array} \qquad u\in\langle 0,1\rangle \ \ v\in\left\langle 0,\tfrac{\pi}{2}\right\rangle\,.$$

řešení:
Opět z předchozího příkladu převezmeme dva tečné vektory a normálový vektor

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= (\cos v, \sin v, 2u) \\ \vec{\sigma} &= (-u\sin v, u\cos v, 0) \\ \vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} &= (-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u)\,. \end{aligned}$$

Opět dosadíme do vztahu $d\vec{S} = \vec{\nu}\,du\,dv$, převedeme plošný integrál na dvojný a ten pak vypočítáme pomocí Fubiniovy věty

$$\iint_\kappa (-y,x,xyz)\,d\vec{S} = \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} (-u\sin v, u\cos v, u^4\sin v\cos v)\cdot(-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, u)\,du\,dv =$$

$$= \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} u^5\sin v\cos v\,du\,dv = \underbrace{\int_0^1 u^5\,du}_{=\frac{1}{6}}\cdot\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v\cos v\,dv}_{=\int_0^1 w\,dw=\frac{1}{2}} = \frac{1}{12}\,,$$

ve výpočtu posledního integrálu jsme použili substituce $w := \sin v$.
Podobně jako v předchozím příkladu i zde pro výpočet prvního integrálu potřebujeme velikost normálového vektoru

$$|\vec{\nu}| = u\sqrt{4u^2+1}\,.$$

Dosazením do $dS = |\vec{\nu}|\;du\,dv$ převedeme plošný integrál na dvojný a ten pak převedeme na jednoduché pomocí Fubiniovy věty

$$\iint_\kappa \frac{xy}{\sqrt{4z+1}}\,dS = \iint_{\langle 0,2\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \underbrace{\frac{u^2\cos v\sin v}{\sqrt{4u^2+1}}\cdot u\sqrt{4u^2+1}}_{=u^3\sin v\cos v}\,du\,dv = \underbrace{\int_0^1 u^3\,du}_{=\frac{1}{4}}\cdot\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v\cos v\,dv}_{=\int_0^1 w\,dw=\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\,.$$

Příklad 11.4:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa \frac{12}{z}\sqrt{x^2+y^2}\,dS \quad \text{a} \quad \iint_\kappa (y,-x,z^2)\,d\vec{S}\,, \qquad \text{kde} \qquad \kappa: \begin{array}{l} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ \underline{z = \sqrt{u}} \end{array} \qquad u \in \langle 0,1\rangle \;\; v \in \left\langle 0, \tfrac{\pi}{2}\right\rangle .$$

řešení:
Nejprve vypočítáme ty správné tečné vektory a jejich vektorový součin

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \left(\frac{\partial}{\partial u}u\cos v, \frac{\partial}{\partial u}u\sin v, \frac{\partial}{\partial u}\sqrt{u}\right) = \left(\cos v, \sin v, \frac{1}{2\sqrt{u}}\right) \\ \vec{\sigma} &= \left(\frac{\partial}{\partial v}u\cos v, \frac{\partial}{\partial v}u\sin v, \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{u}\right) = (-u\sin v, u\cos v, 0) \\ \vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} &= \left(\det\begin{pmatrix}\tau_2 & \tau_3\\ \sigma_2 & \sigma_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_3\\ \sigma_1 & \sigma_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}\right) = \left(-\frac{1}{2}\sqrt{u}\cos v, -\frac{1}{2}\sqrt{u}\sin v, u\right). \end{aligned}$$

Dosadíme do vztahu $d\vec{S} = \vec{\nu}\,du\,dv$ a vypočítáme druhý z integrálů

$$\begin{aligned} \iint_\kappa (y,-x,z^2)\,d\vec{S} &= \iint_{\langle 0,1\rangle\times\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle} (u\sin v, -u\cos v, u)\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{u}\cos v, -\frac{1}{2}\sqrt{u}\sin v, u\right)du\,dv = \\ &= \iint_{\langle 0,1\rangle\times\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle} u^2\,du\,dv = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv}_{=\frac{\pi}{2}}\cdot\underbrace{\int_0^1 u^2\,du}_{=\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}\pi\,. \end{aligned}$$

Pro výpočet prvního integrálu potřebujeme velikost normálového vektoru

$$|\vec{\nu}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\sqrt{u}\cos v\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\sqrt{u}\sin v\right)^2 + u^2} = \frac{\sqrt{u}}{2}\sqrt{1+4u}\,.$$

Pak dosazením do $dS = |\vec{\nu}|\;du\,dv$ obdržíme

$$\begin{aligned} \iint_\kappa \frac{12}{z}\sqrt{x^2+y^2}\,dS &= \iint_{\langle 0,1\rangle\times\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle} \frac{12}{\sqrt{u}}\sqrt{u^2}\cdot\frac{\sqrt{u}}{2}\sqrt{1+4u}\;du\,dv = 6\iint_{\langle 0,1\rangle\times\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle} u\sqrt{1+4u}\,du\,dv = \\ &= 6\int_0^{\frac{\pi}{2}} dv\cdot\int_0^1 u\sqrt{1+4u}\,du = 6\cdot\frac{\pi}{2}\int_1^5 \frac{w-1}{4}\cdot\sqrt{w}\,\frac{dw}{4} = \frac{3}{16}\pi\int_1^5 \left(w^{\frac{3}{2}} - w^{\frac{1}{2}}\right)dw = \\ &= \frac{3}{16}\pi\left(\frac{2}{5}[w^2\sqrt{w}]_1^5 - \frac{2}{3}[w\sqrt{w}]_1^5\right) = \frac{3}{16}\pi\left(\frac{2}{5}\cdot 25\sqrt{5} - \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\cdot 5\sqrt{5} + \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{20}(25\sqrt{5}+1)\,, \end{aligned}$$

použili jsme substituci $w := 1+4u$, odkud jsme dostali $dw = 4\,du$, $u = \frac{w-1}{4}$, $0 \rightsquigarrow 1$ a $1 \rightsquigarrow 5$.

Příklad 11.5:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa xz\,dS\,, \qquad \text{kde} \qquad \kappa: \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}u\cos v \\ y = \frac{1}{2}u\sin v \\ \underline{z = \frac{\sqrt{3}}{2}u} \end{array} \qquad u \in \langle 0,2\rangle \;\; v \in \left\langle 0, \tfrac{\pi}{2}\right\rangle .$$

řešení:

Zjistíme tečné vektory $\vec{\tau}$ a $\vec{\sigma}$, jejich vektorový součin $\vec{\tau}\times\vec{\sigma}$ a jeho velikost

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2}u\cos v, \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2}u\sin v, \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{3}}{2}u\right) = \left(\frac{1}{2}\cos v, \frac{1}{2}\sin v, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
\vec{\sigma} &= \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{2}u\cos v, \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{2}u\sin v, \frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{3}}{2}u\right) = \left(-\frac{1}{2}u\sin v, \frac{1}{2}u\cos v, 0\right)\\
\vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} &= \left(\det\begin{pmatrix}\tau_2 & \tau_3\\ \sigma_2 & \sigma_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_3\\ \sigma_1 & \sigma_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}u\cos v, -\frac{\sqrt{3}}{4}u\sin v, \frac{1}{4}u\right)\\
|\vec{\nu}| &= \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}u\cos v\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}u\sin v\right)^2 + \left(\frac{1}{4}u\right)^2} = \frac{u}{2}\,.
\end{aligned}$$

Dosadíme do $dS = |\vec{\nu}|\,du\,dv$ a obdržíme

$$\begin{aligned}
\iint_\kappa xz\,dS &= \iint_{\langle 0,2\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \frac{1}{2}u\cos v\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}u\cdot\frac{u}{2}\,du\,dv =\\
&= \iint_{\langle 0,2\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} \frac{\sqrt{3}}{8}u^3\cos v\,du\,dv =\\
&= \frac{\sqrt{3}}{8}\int_0^2 u^3\,du\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos v\,dv = \frac{\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{1}{4}\left[u^4\right]_0^2\cdot[\sin v]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Příklad 11.6:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa xz\,dS\,,\qquad \text{kde}\qquad \kappa:\ \begin{array}{l} x = 2\cos u\sin v\\ y = 2\sin u\sin v\\ \underline{z = 2\cos v}\end{array}\qquad u\in\left\langle 0,\tfrac{\pi}{2}\right\rangle\ \ v\in\left\langle 0,\tfrac{\pi}{2}\right\rangle\,.$$

řešení:
Zjistíme tečné vektory $\vec{\tau}$ a $\vec{\sigma}$, jejich vektorový součin $\vec{\tau}\times\vec{\sigma}$ a jeho velikost

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \left(\frac{\partial}{\partial u}2\cos u\sin v, \frac{\partial}{\partial u}2\sin u\sin v, \frac{\partial}{\partial u}2\cos v\right) = (-2\sin u\sin v, 2\cos u\sin v, 0)\\
\vec{\sigma} &= \left(\frac{\partial}{\partial v}2\cos u\sin v, \frac{\partial}{\partial v}2\sin u\sin v, \frac{\partial}{\partial v}2\cos v\right) = (2\cos u\cos v, 2\sin u\cos v, -2\sin v)\\
\vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} &= \left(\det\begin{pmatrix}\tau_2 & \tau_3\\ \sigma_2 & \sigma_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_3\\ \sigma_1 & \sigma_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}\right) = (-4\cos u\sin^2 v, -4\sin u\sin^2 v, -4\sin v\cos v)\\
|\vec{\nu}|^2 &= \left(-4\cos u\sin^2 v\right)^2 + \left(-4\sin u\sin^2 v\right)^2 + (-4\sin v\cos v)^2 =\\
&= 16(\underbrace{\cos^2 u\sin^4 v + \sin^2 u\sin^4 v}_{=\sin^4 v} + \sin^2 v\cos^2 v) = 16\sin^2 v(\sin^2 v + \cos^2 v) = 16\sin^2 v\\
|\vec{\nu}| &= 4\sin v\,.
\end{aligned}$$

Dosadíme do $dS = |\vec{\nu}|\,du\,dv$ a obdržíme

$$\begin{aligned}
\iint_\kappa xz\,dS &= \iint_{\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle} 2\cos u\sin v\cdot 2\cos v\cdot 4\sin v\,du\,dv =\\
&= 16\iint_{\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{2}\rangle}\cos u\sin^2 v\cos v\,du\,dv = 16\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos u\,du}_{=1}\cdot\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 v\cos v\,dv}_{=\int_0^1 w^2\,dw=\frac{1}{3}} = \frac{16}{3}\,,
\end{aligned}$$

použili jsme substituci $w := \sin v$.

Příklad 11.7:

Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa (y-z, z-x, x-y)\, d\vec{S}\,, \qquad \text{kde} \qquad \kappa: \begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{2}}{2} u \cos v \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} u \sin v \\ \underline{z = \frac{\sqrt{2}}{2} u} \end{array} \qquad u \in \langle 0,3\rangle \;\; v \in \langle 0,\pi\rangle\,.$$

řešení:
Nejprve vypočítáme ty správné tečné vektory a jejich vektorový součin

$$\vec{\tau} = (\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{2}}{2}u\cos v, \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{2}}{2}u\sin v, \frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{2}}{2}u) = (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos v, \frac{\sqrt{2}}{2}\sin v, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\vec{\sigma} = (\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{2}}{2}u\cos v, \frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{2}}{2}u\sin v, \frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{2}}{2}u) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}u\sin v, \frac{\sqrt{2}}{2}u\cos v, 0)$$

$$\vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} = (\det\begin{pmatrix}\tau_2 & \tau_3\\ \sigma_2 & \sigma_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_3\\ \sigma_1 & \sigma_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}) = (-\frac{1}{2}u\cos v, -\frac{1}{2}u\sin v, \frac{1}{2}u)\,.$$

Abychom převedli plošný integrál na dvojný, dosadíme do vztahu $d\vec{S} = \vec{\nu}\, du\, dv$ a ten pak vypočítáme pomocí Fubiniovy věty

$$\iint_\kappa (y-z, z-x, x-y)\, d\vec{S} =$$

$$= \iint_{\langle 0,3\rangle\times\langle 0,\pi\rangle} (\frac{\sqrt{2}}{2}u(\sin v - 1), \frac{\sqrt{2}}{2}u(1-\cos v), \frac{\sqrt{2}}{2}u(\cos v - \sin v))\cdot(-\frac{1}{2}u\cos v, -\frac{1}{2}u\sin v, \frac{1}{2}u)\, du\, dv =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\iint_{\langle 0,3\rangle\times\langle 0,\pi\rangle} u^2(\cos v - \sin v)\, du\, dv = \frac{\sqrt{2}}{2}\underbrace{\int_0^3 u^2\, du}_{=\frac{1}{3}[u^3]_0^3=9}\cdot\underbrace{\int_0^\pi (\cos v - \sin v)\, dv}_{=[\sin v]_0^\pi + [\cos v]_0^\pi = -2} = -9\sqrt{2}\,.$$

Příklad 11.8:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa \frac{x}{\sqrt{y^2+2z+2}}\, dS \quad \text{a} \quad \iint_\kappa (y,x,z)\, d\vec{S}\,, \qquad \text{kde} \qquad \kappa: \begin{array}{l} x = u+v \\ y = u-v \\ \underline{z = uv} \end{array} \qquad u,v\in\langle 0,1\rangle\,.$$

řešení:
Nejprve vypočítáme ty správné tečné vektory a jejich vektorový součin

$$\vec{\tau} = (\frac{\partial}{\partial u}(u+v), \frac{\partial}{\partial u}(u-v), \frac{\partial}{\partial u}uv) = (1,1,v)$$

$$\vec{\sigma} = (\frac{\partial}{\partial v}(u+v), \frac{\partial}{\partial v}(u-v), \frac{\partial}{\partial v}uv) = (1,-1,u)$$

$$\vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} = (\det\begin{pmatrix}\tau_2 & \tau_3\\ \sigma_2 & \sigma_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_3\\ \sigma_1 & \sigma_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}) = (u+v, v-u, -2)\,.$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{S} = \vec{\nu}\, du\, dv$ vypočítat druhý z integrálů

$$\iint_\kappa (y,x,z)\, d\vec{S} = \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} (u-v, u+v, uv)\cdot(u+v, v-u, -2)\, du\, dv = -2\iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} uv\, du\, dv =$$

$$= -2\int_0^1 u\, du\cdot\int_0^1 v\, dv = -2\frac{1}{2}[u^2]_0^1\cdot\frac{1}{2}[v^2]_0^1 = -\frac{1}{2}\,.$$

Pro výpočet prvního integrálu potřebujeme navíc ještě velikost onoho normálového vektoru

$$|\vec{\nu}| = \sqrt{(u+v)^2 + (v-u)^2 + (-2)^2} = \sqrt{2u^2+2v^2+4}\,.$$

Pak dosazením do $dS = |\vec{\nu}|\, du\, dv$ obdržíme

$$\iint_\kappa \frac{x}{\sqrt{y^2+2z+2}}\, dS = \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} \frac{u+v}{\sqrt{(u-v)^2+2uv+2}} \cdot \sqrt{2(u^2+v^2+2)}\, du\, dv =$$

$$= \sqrt{2}\iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} (u+v)\, du\, dv = \sqrt{2}\int_0^1 (\underbrace{\int_0^1 (u+v)\, du}_{\left[\frac{u}{2}+uv\right]_{u:=0}^{u:=1}=\frac{1}{2}+v})\, dv = \sqrt{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{2}+v\right) dv = \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}v+\frac{v^2}{2}\right]_0^1 = \sqrt{2}\,.$$

Příklad 11.9:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa (x^2, -xy, z)\, d\vec{S}\,, \qquad \text{kde} \qquad \begin{array}{ll} \kappa: & x = \frac{u}{v} \\ & y = uv \\ & \underline{z = u^2+v^2} \end{array} \qquad u \in \langle 0,1\rangle \ \ v \in \langle 1,2\rangle\,.$$

řešení:
Nejprve vypočítáme ty správné tečné vektory a jejich vektorový součin

$$\vec{\tau} = (\frac{\partial}{\partial u}\frac{u}{v}, \frac{\partial}{\partial u}uv, \frac{\partial}{\partial u}(u^2+v^2)) = (\frac{1}{v}, v, 2u)$$
$$\vec{\sigma} = (\frac{\partial}{\partial v}\frac{u}{v}, \frac{\partial}{\partial v}uv, \frac{\partial}{\partial v}(u^2+v^2)) = (-\frac{u}{v^2}, u, 2v)$$
$$\vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} = (\det\begin{pmatrix}\tau_2 & \tau_3\\ \sigma_2 & \sigma_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_3\\ \sigma_1 & \sigma_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}) = (2v^2-2u^2, -\frac{2u^2}{v^2}-2, \frac{2u}{v})\,.$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{S} = \vec{\nu}\, du\, dv$ vypočítat integrál

$$\iint_\kappa (x^2, -xy, z)\, d\vec{S} = \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle} (\frac{u^2}{v^2}, -u^2, (u^2+v^2)) \cdot (2v^2-2u^2, -\frac{2u^2}{v^2}-2, \frac{2u}{v})\, du\, dv =$$
$$= \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle} \left(4u^2 + \frac{2u^3}{v} + 2uv\right) du\, dv = \int_1^2 (\int_0^1 (4u^2 + \frac{2u^3}{v} + 2uv)\, du)\, dv =$$
$$= \int_1^2 \left[\frac{4}{3}u^3 + \frac{u^4}{v} + u^2 v\right]_0^1 dv = \int_1^2 (\frac{4}{3} + \frac{1}{v} + v)\, dv = \left[\frac{4}{3}v + \ln v + \frac{1}{2}v^2\right]_1^2 = \frac{17}{6} + \ln 2\,.$$

Příklad 11.10:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}\, dS\,, \qquad \text{kde} \qquad \begin{array}{ll} \kappa: & x = u^2 \\ & y = v^2 \\ & \underline{z = uv} \end{array} \qquad u, v \in \langle 1,3\rangle\,.$$

řešení:
Nejprve vypočítáme ty správné tečné vektory, jejich vektorový součin a jeho velikost

$$\vec{\tau} = (\frac{\partial}{\partial u}u^2, \frac{\partial}{\partial u}v^2, \frac{\partial}{\partial u}uv) = (2u, 0, v)$$
$$\vec{\sigma} = (\frac{\partial}{\partial v}u^2, \frac{\partial}{\partial v}v^2, \frac{\partial}{\partial v}uv) = (0, 2v, u)$$
$$\vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} = (\det\begin{pmatrix}\tau_2 & \tau_3\\ \sigma_2 & \sigma_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_3\\ \sigma_1 & \sigma_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}) = (-2v^2, -2u^2, 4uv)$$
$$|\vec{\nu}| = \sqrt{(-2v^2)^2 + (-2u^2)^2 + (4uv)^2} = 2\sqrt{u^4+v^4+4u^2v^2}\,.$$

Pak dosazením do $dS = |\vec{\nu}|\,du\,dv$ obdržíme

$$\iint_\kappa \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}\,dS = \iint_{\langle 1,3\rangle\times\langle 1,3\rangle} \frac{uv}{\sqrt{u^4+v^4+4u^2v^2}}\cdot 2\sqrt{u^4+v^4+4u^2v^2}\,du\,dv =$$
$$= 2\iint_{\langle 1,3\rangle\times\langle 1,3\rangle} uv\,du\,dv = 2\int_1^3 u\,du\cdot\int_1^3 v\,dv = 2\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^3\cdot\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^3 = 32\,.$$

Příklad 11.11:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS\,,\qquad \text{kde}\qquad \kappa:\ \begin{array}{l} x=\frac{u}{v}\\ y=\frac{v}{u}\\ \underline{z=uv} \end{array}\qquad u,v\in\langle 1,2\rangle\,.$$

řešení:
Nejprve vypočítáme ty správné tečné vektory, jejich vektorový součin a jeho velikost

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{u}{v}, \frac{\partial}{\partial u}\frac{v}{u}, \frac{\partial}{\partial u}uv\right) = \left(\frac{1}{v}, -\frac{v}{u^2}, v\right)$$
$$\vec{\sigma} = \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{u}{v}, \frac{\partial}{\partial v}\frac{v}{u}, \frac{\partial}{\partial v}uv\right) = \left(-\frac{u}{v^2}, \frac{1}{u}, u\right)$$
$$\vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} = \left(\det\begin{pmatrix}\tau_2 & \tau_3\\ \sigma_2 & \sigma_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_3\\ \sigma_1 & \sigma_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}\right) = \left(-2\frac{v}{u}, -2\frac{u}{v}, 0\right)$$
$$|\vec{\nu}| = \sqrt{\left(-2\frac{v}{u}\right)^2 + \left(-2\frac{u}{v}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{u^4+v^4}{u^2v^2}}\,.$$

Pak dosazením do $dS = |\vec{\nu}|\,du\,dv$ obdržíme

$$\iint_\kappa \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dS = \iint_{\langle 1,2\rangle\times\langle 1,2\rangle} \frac{uv}{\sqrt{\left(\frac{u}{v}\right)^2+\left(\frac{v}{u}\right)^2}}\cdot 2\sqrt{\frac{u^4+v^4}{u^2v^2}}\,du\,dv =$$
$$= 2\iint_{\langle 1,2\rangle\times\langle 1,2\rangle} uv\,du\,dv = 2\int_1^2 u\,du\cdot\int_1^2 v\,dv = 2\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^2\cdot\left[\frac{v^2}{2}\right]_1^2 = \frac{9}{2}\,.$$

Příklad 11.12:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa (x,y,z)\,d\vec{S}\,,\qquad \text{kde}\qquad \kappa:\ \begin{array}{l} x=u^2-v\\ y=v^2-u\\ \underline{z=uv} \end{array}\qquad u,v\in\langle 0,1\rangle\,.$$

řešení:
Nejprve vypočítáme ty správné tečné vektory a jejich vektorový součin

$$\vec{\tau} = \left(\frac{\partial}{\partial u}(u^2-v), \frac{\partial}{\partial u}(v^2-u), \frac{\partial}{\partial u}uv\right) = (2u, -1, v)$$
$$\vec{\sigma} = \left(\frac{\partial}{\partial v}(u^2-v), \frac{\partial}{\partial v}(v^2-u), \frac{\partial}{\partial v}uv\right) = (-1, 2v, u)$$
$$\vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} = \left(\det\begin{pmatrix}\tau_2 & \tau_3\\ \sigma_2 & \sigma_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_3\\ \sigma_1 & \sigma_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}\right) = (-u-2v^2, -2u^2-v, 4uv-1)\,.$$

Odtud můžeme snadno dosazením do vztahu $d\vec{S} = \vec{\nu}\, du\, dv$ vypočítat integrál

$$\iint_\kappa (x,y,z)\, d\vec{S} = \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} (u^2-v, v^2-u, uv)\cdot(-u-2v^2, -2u^2-v, 4uv-1)\, du\, dv =$$

$$= \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,1\rangle} (u^3+uv+v^3)\, du\, dv = \int_0^1 (\int_0^1 (u^3+uv+v^3)\, du)\, dv = \int_0^1 \left[\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2}v + uv^3\right]_{u:=0}^{u:=1} dv =$$

$$= \int_0^1 (\frac{1}{4} + \frac{1}{2}v + v^3)\, dv = \left[\frac{1}{4}v + \frac{1}{4}v^2 + \frac{1}{4}v^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}\,.$$

Příklad 11.13:
Vypočítejte plošný integrál

$$\iint_\kappa (2z, 0, \frac{1}{y})\, d\vec{S}\,, \qquad \text{kde} \qquad \kappa: \quad \begin{aligned} x &= u\ln v \\ y &= uv \\ z &= \tfrac{1}{2}(u^2+v^2) \end{aligned} \qquad u\in\langle 0,1\rangle\,, v\in\langle 1,2\rangle\,.$$

řešení:
Vypočítáme ty správné tečné vektory a jejich vektorový součin

$$\vec{\tau} = (\frac{\partial}{\partial u}u\ln v, \frac{\partial}{\partial u}uv, \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{2}(u^2+v^2)) = (\ln v, v, u)$$

$$\vec{\sigma} = (\frac{\partial}{\partial v}u\ln v, \frac{\partial}{\partial v}uv, \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{2}(u^2+v^2)) = (\frac{u}{v}, u, v)$$

$$\vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} = (\det\begin{pmatrix}\tau_2 & \tau_3\\ \sigma_2 & \sigma_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_3\\ \sigma_1 & \sigma_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}) = (v^2-u^2, \frac{u^2}{v} - v\ln v, u\ln v - u)\,.$$

Dosazením do vztahu $d\vec{S} = \vec{\nu}\, du\, dv$ dostaneme

$$\iint_\kappa (2z, 0\frac{1}{y})\, d\vec{S} = \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle} (u^2+v^2, 0, \frac{1}{uv})\cdot(v^2-u^2, \frac{u^2}{v} - v\ln v, u\ln v = u)\, du\, dv =$$

$$= \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 1,2\rangle} (v^4+u^4+\frac{\ln v}{v} - \frac{1}{v})\, du\, dv = \int_0^1 (\int_1^2 (v^4-u^4+\frac{\ln v}{v} - \frac{1}{v})\, dv)\, du =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{u^5}{5} - u^4 v + \frac{1}{2}(\ln v)^2 - \ln v\right]_{v:=0}^{v:=1} du = \int_0^1 (\frac{31}{5} - u^4 + \frac{1}{2}\ln^2 2 - \ln 2)\, du =$$

$$= \left[\frac{31}{5}u - \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{2}\ln^2 2 - u\ln 2\right]_0^1 = 6 + \frac{1}{2}\ln^2 2 - \ln 2\,.$$

12. Greenova, Stokesova a Gaussova-Ostrogradského věta

V tomto odstavci se budeme zabývat větami týkajícími se křivkových a plošných integrálů. Zopakujeme pouze vzorce, přesné formulace najde čtenář opět v [1], [2], [3], [7].

Greenova věta (1. verze):

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\nu_0}\, ds \ ,$$

kde $\vec{\nu_0}$ je vnější normálový vektor hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω, který má velikost 1, tedy $|\vec{\nu_0}| = 1$, podobně značíme jednotkový tečný (nebo směrový) vektor hranice $\vec{\tau_0} = \vec{\nu_0}^{\perp}$. Uvědomíme si, že $\operatorname{div} \vec{f}(x)$ znamená zdroj, zřídlo vektorové funkce $\vec{f}$ v bodě x. Pak lze přiblížit fyzikální smysl věty následovně: „Kolik funkce $\vec{f}$ v oblasti Ω vznikne, tolik musí odtéci přes její hranici.“

Greenova věta (2. verze):

$$\iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{f}\, d\vec{r} \ .$$

Tento vzorec obdržíme, když do první verze dosadíme funkci $-\vec{f}^{\perp}$, uvědomíme si, že pro libovolné vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ platí $\vec{u}^{\perp} \cdot \vec{v} = -\vec{u} \cdot \vec{v}^{\perp}$ a $d\vec{r} = \vec{\tau_0}\, ds$

$$\iint_{\Omega} -\operatorname{div} \vec{f}^{\perp}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} -\vec{f}^{\perp} \cdot \vec{\nu_0}\, ds = \int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\nu_0}^{\perp}\, ds = -\int_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot \vec{\tau_0}\, ds = \int_{\partial\Omega} \vec{f}\, d\vec{r} .$$

Gaussova - Ostrogradského věta:

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{f} d\vec{S} \ .$$

Jde o zobecnění 1. verze Greenovy věty pro třírozměrné těleso (připomeňme jen $d\vec{S} = \vec{\nu_0}\, dS$). Fyzikální smysl zůstává stejný.

Stokesova věta:

$$\iint_{\kappa} \operatorname{rot} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_{\gamma} \vec{f}\, d\vec{r} \ ,$$

kde křivka γ tvoří „okraj“ plochy κ. I zde jde o jisté zobecnění Greenovy věty (tentokrát 2. verze) pro „křivou“ plochu v prostoru, neboť výraz $-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}$ je jen třetí složka $\operatorname{rot} \vec{f}$. Protože $\operatorname{rot} \vec{f}(x)$ znamená cirkulaci vektorové funkce $\vec{f}$ v bodě x, fyzikální smysl této věty lze přiblížit představou: „Celková cirkulace funkce $\vec{f}$ na ploše κ se musí projevit na jejím okraji γ.“

Příklad 12.1:
Ověřte Greenovu větu pro funkci

$$\vec{f}(x, y) = (x^3 y, 2xy)$$

a pro oblast Ω tvořenou vnitřkem elipsy se středem v počátku $[0, 0]$ s poloosami $a = 5$ a $b = 3$.

řešení:
Budeme ověřovat 2. verzi Greenovy věty

$$\iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \vec{f}\, d\vec{r} \ .$$

Derivováním obdržíme výraz v dvojném integrálu na levé straně rovnosti

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = -x^3 + 2y \ .$$

Zadanou elipsu vyjádříme obecnou rovnicí

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \ , \ \text{odkud vyjádříme} \ \ y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2} \ ,$$

a levou stranu pak počítáme pomocí Fubiniovy věty

$$\iint_\Omega \left(-x^3+2y\right)\,dx\,dy = \int_{-5}^{5}\left(\int_{-\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}^{\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}(-x^3+2y)\,dy\right)\,dx =$$

$$= \int_{-5}^{5}\left[-x^3y+y^2\right]_{y:=-\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}^{y:=\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}}\,dx = \int_{-5}^{5} -\frac{6}{5}x^3\sqrt{25-x^2}\,dx = -\frac{6}{5}\int_{-5}^{5} x^3\sqrt{25-x^2}\,dx = 0\ ,$$

neboť integrál z liché funkce na intervalu symetrickém podle počátku je roven nule.

Pro výpočet pravé strany rovnosti využijeme parametrické vyjádření zadané elipsy

$$\partial\Omega:\quad \begin{array}{l} x = 5\cos t \\ \underline{y = 3\sin t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\ .$$

Odtud dostaneme tečný vektor $\vec{\tau} = (\,-5\sin t\,,\ 3\cos t\,)$ a dopočítáme příslušný křivkový integrál

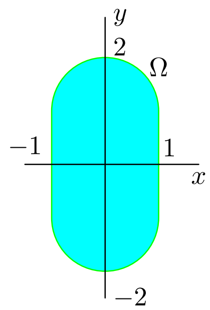
$$\int_{\partial\Omega}(x^3y, 2xy)\,d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\left(375\cos^3 t\sin t\,,\ 30\cos t\sin t\right)\cdot(-5\sin t\,,\ 3\cos t)\ dt =$$

$$= -1875\underbrace{\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)\sin^2 t\cos t\,dt}_{=0} + 90\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin t\,dt}_{=0} = 0\ .$$

Příklad 12.2:
Ověřte Greenovu větu pro funkci

$$\vec{f}(x,y) = (-y, x^2)$$

a pro oblast Ω na obrázku.



řešení:
Budeme ověřovat 2. verzi Greenovy věty

$$\iint_\Omega\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega}\vec{f}\,d\vec{r}\ .$$

Derivováním obdržíme výraz v dvojném integrálu na levé straně rovnosti

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x+1\ .$$

Vyjádříme horní a dolní část hranice oblasti funkčním vztahem

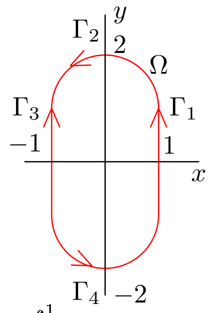
$$y_H = 1+\sqrt{1-x^2} \qquad y_D = -1-\sqrt{1-x^2}$$

a levou stranu pak počítáme pomocí Fubiniovy věty

$$\iint_\Omega (2x+1)\ dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}(2x+1)\,dy\right)\,dx = \int_{-1}^{1}(2x+1)\,[y]_{y:=-1-\sqrt{1-x^2}}^{y:=1+\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{1}(2x+1)(1+\sqrt{1-x^2})\,dx = 2\underbrace{\int_{-1}^{1}(2x+1)\,dx}_{=2} + 4\underbrace{\int_{-1}^{1}x\sqrt{1-x^2}\,dx}_{=0} + 2\underbrace{\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx}_{=\frac{\pi}{2}} = 4+\pi\ ,$$

poslední integrál vypočítáme nejlépe substitucí $x = \sin t$.



Pro výpočet pravé strany rovnosti využijeme parametrické vyjádření jednotlivých částí hranice oblasti $\partial\Omega = \Gamma_1 + \Gamma_2 - \Gamma_3 + \Gamma_4$ a křivkový integrál rozdělíme na čtyři

$$\int_{\partial\Omega} = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} - \int_{\Gamma_3} + \int_{\Gamma_4} \ .$$

Pro každou část hranice uvedeme její parametrické vyjádření, vektor $\vec{\tau}$ a příslušný křivkový integrál.

Počítáme první část

$$\Gamma_1 : \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ \underline{y = t} \end{array} \qquad t \in \langle -1, 1\rangle \,, \quad \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (0,1) \quad \text{a integrál } \int_{\Gamma_1} (-y, x^2)\, d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (-t, 1)\cdot(0,1)\ dt = 2\,.$$

Následuje druhá část

$$\Gamma_2 : \quad \begin{array}{l} x = \cos t \\ \underline{y = 1 + \sin t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, \pi\rangle \,, \qquad \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (-\sin t, \cos t) \quad \text{a integrál } \int_{\Gamma_2} (-y, x^2)\, d\vec{r} =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(-1 - \sin t, \cos^2 t\right) \cdot \left(-\sin t, \cos t\right)\ dt = \int_0^{\pi} \left(\sin t + \sin^2 t + \cos^3 t\right)\ dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^{\pi} \sin t\, dt}_{=-[\cos t]_0^{\pi}=2} + \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2 t\, dt}_{=\left[\frac{1}{2}(x - \sin t \cos t)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}} + \underbrace{\int_0^{\pi} \cos^3 t\, dt}_{=0} = 2 + \frac{\pi}{2}\ .$$

Výpočet třetí části je podobný jako u první části,

$$\Gamma_3 : \quad \begin{array}{l} x = -1 \\ \underline{y = t} \end{array} \qquad t \in \langle -1, 1\rangle \,, \quad \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (0,1) \quad \text{a integrál } \int_{\Gamma_3} (-y, x^2)\, d\vec{r} = \int_{-1}^{1} (-t, 1)\cdot(0,1)\ dt = 2\,.$$

Konečně čtvrtá část (podobná druhé části)

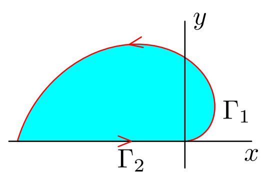
$$\Gamma_4 : \quad \begin{array}{l} x = \cos t \\ \underline{y = -1 + \sin t} \end{array} \qquad t \in \langle \pi, 2\pi\rangle \,, \qquad \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (-\sin t, \cos t) \quad \text{a integrál } \int_{\Gamma_4} (-y, x^2)\, d\vec{r} =$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \left(1 - \sin t, \cos^2 t\right) \cdot \left(-\sin t, \cos t\right)\ dt = -\int_{\pi}^{2\pi} \sin t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} \cos^3 t\, dt = 2 + \frac{\pi}{2}\ .$$

Celkově se i pravá strana rovná $4 + \pi$ a Greenova věta je ověřená.

Příklad 12.3:

Užijte Greenovu větu pro funkce



$$\vec{f}(x,y) = (xy, y^2) \qquad \vec{g}(x,y) = (x^2, xy) \qquad \vec{h}(x,y) = (-y, x)$$

a pro oblast Ω ohraničenou křivkou Γ_1 a osou x, kde

$$\Gamma_1 : \quad \begin{array}{l} x = t\cos t \\ \underline{y = t\sin t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, \pi\rangle\ .$$

Vypočítejte tak dvojné integrály

$$\iint_{\Omega} x\, dxdy \qquad \iint_{\Omega} y\, dxdy \qquad \iint_{\Omega} 1\, dxdy\ .$$

řešení:

Výraz v dvojném integrálu na pravé straně 2. verze Greenovy věty pro funkce $\vec{f}$, $\vec{g}$ a $\vec{h}$ skutečně dává po řadě

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = -x \qquad -\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial x} = y \qquad -\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial x} = 2\ .$$

Hranice $\partial\Omega$ oblasti Ω sestává ze dvou částí, z křivky Γ_1 a z části osy x. Můžeme psát $\partial\Omega = \Gamma_1 + \Gamma_2$, kde

$$\Gamma_2: \quad \begin{array}{l} x = -\pi + t \\ \underline{y = 0} \end{array} \qquad t \in \langle 0, \pi \rangle \ .$$

Počítejme tečný vektor pro křivku Γ_1 a označme ho $\tau_1 = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)$ a pro křivku Γ_2 pak $\tau_2 = (1, 0)$.
Pro $\vec{f}$ obdržíme z Greenovy věty

$$\iint_\Omega -x\,dx\,dy = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} \vec{f}\,d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{f}\,d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{f}\,d\vec{r} = \pi^2 - 4$$

neboť

$$\int_{\Gamma_1} (xy, y^2)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (t^2\cos t\sin t\,,\, t^2\sin^2 t)\cdot(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)\,dt = \int_0^\pi t^2 \sin t\,dt =$$

$$= [-t^2\cos t]_0^\pi + 2\int_0^\pi t\cos t\,dt = \pi^2 + 2\left([t\sin t]_0^\pi - \int_0^\pi \sin t\,dt\right) = \pi^2 - 2\cdot 2 = \pi^2 - 4\ ,$$

(použili jsme dvakrát metodu per partes) a

$$\int_{\Gamma_2} (xy, y^2)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (0,0)\cdot(1,0)\,dt = 0\ .$$

Pro $\vec{g}$ obdržíme z Greenovy věty

$$\iint_\Omega y\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \vec{g}\,d\vec{r} = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial g_1}{\partial y} + \frac{\partial g_2}{\partial x}\right) dxdy = \int_{\Gamma_1} \vec{g}\,d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{g}\,d\vec{r} = -2\pi + \frac{1}{3}\pi^3$$

neboť

$$\int_{\Gamma_1} (x^2, xy)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (t^2\cos^2 t\,,\, t^2\cos t\sin t)\cdot(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)\,dt = \int_0^\pi t^2\cos t\,dt =$$

$$= [t^2\sin t]_0^\pi - 2\int_0^\pi t\sin t\,dt = -2\left([-t\cos t]_0^\pi + \int_0^\pi \cos t\,dt\right) = -2\pi$$

a

$$\int_{\Gamma_2} (x^2, xy)\,d\vec{r} = \int_0^\pi ((t-\pi)^2, 0)\cdot(1,0)\,dt = \int_0^\pi (t-\pi)^2\,dt = \left[\frac{1}{3}(t-\pi)^3\right]_0^\pi = \frac{1}{3}\pi^3\ .$$

Pro $\vec{h}$ obdržíme z Greenovy věty

$$\iint_\Omega 2\,dx\,dy = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial h_1}{\partial y} + \frac{\partial h_2}{\partial x}\right) dxdy = \int_{\partial\Omega} \vec{h}\,d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{h}\,d\vec{r} - \int_{\Gamma_2} \vec{h}\,d\vec{r} = \frac{1}{3}\pi^3$$

neboť

$$\int_{\Gamma_1} (-y, x)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (-t\sin t\,,\, t\cos t)\cdot(\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t)\,dt = \int_0^\pi t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^\pi = \frac{1}{3}\pi^3$$

a

$$\int_{\Gamma_2} (-y, x)\,d\vec{r} = \int_0^\pi (0, \pi - t)\cdot(1,0)\,dt = 0\ .$$

Zapíšeme výsledky

$$\iint_\Omega x\,dxdy = 4 - \pi^2\ , \qquad \iint_\Omega y\,dxdy = \frac{1}{3}\pi^3 - 2\pi\ , \qquad \iint_\Omega 1\,dxdy = \frac{1}{6}\pi^3\ .$$

Příklad 12.4:
Zjistěte souřadnice těžiště rovinného útvaru z předchozího příkladu. (Předpokládáme, že hmota je rozložena stejnoměrně, neboli hustota je konstatní $\rho(x,y) = 1$.)

řešení:
Pro souřadnice těžiště T platí

$$x_T = \frac{M_x}{m} \ \text{ a } \ y_T = \frac{M_y}{m}\ , \text{ kde } M_x = \iint_\Omega x\rho(x,y)dxdy \quad M_y = \iint_\Omega y\rho(x,y)dxdy \ \text{ a } \ m = \iint_\Omega \rho(x,y)dxdy\ ,$$

kde m značí hmotnost a M_x, M_y tzv. statické momenty. Všechny potřebné integrály jsme vypočítali v předchozím příkladě

$$m = \iint_\Omega 1dxdy = \frac{1}{6}\pi^3 \quad M_x = \iint_\Omega xdxdy = 4 - \pi^2 \quad M_y = \iint_\Omega ydxdy = \frac{1}{3}\pi^3 - 2\pi \ ,$$

dostáváme tedy

$$x_T = \frac{4-\pi^2}{\frac{1}{6}\pi^3} = \frac{24 - 6\pi^2}{\pi^3} = \frac{24}{\pi^3} - \frac{6}{\pi} \quad \text{a} \quad y_T = \frac{\frac{1}{3}\pi^3 - 2\pi}{\frac{1}{6}\pi^3} = \frac{2\pi^2 - 12}{\pi^2} = 2 - \frac{12}{\pi^2} \ .$$

Příklad 12.5:
Ověřte Stokesovu větu pro funkci

$$\vec{f}(x,y) = (x \ln z, y \ln z, xy)$$

a pro oblast

$$\kappa: \quad \begin{array}{l} x = t \\ y = s \\ \underline{z = ts} \end{array} \qquad \begin{array}{l} t \in \langle 1,2 \rangle \\ s \in \langle 1,3 \rangle \end{array} \ .$$

řešení:
Budeme ověřovat Stokesovu větu

$$\iint_\kappa \operatorname{rot} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_\gamma \vec{f}\, d\vec{r} \ ,$$

kde křivka γ tvoří "okraj" plochy κ.

Zjistíme rotaci na levé straně rovnosti

$$\operatorname{rot} \vec{f} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (x \ln z, y \ln z, xy) = (x - \frac{y}{z}, -y + \frac{x}{z}, 0) \ .$$

Pro výpočet plošného integrálu je třeba vypočítat tečné vektory a jejich vektorový součin

$$\vec{\tau} = (\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}) = (1,0,s) \quad \vec{\sigma} = (\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}) = (0,1,t) \ , \quad \vec{\nu} = \vec{\tau} \times \vec{\sigma} = (1,0,s) \times (0,1,t) = (-s,-t,1) \ .$$

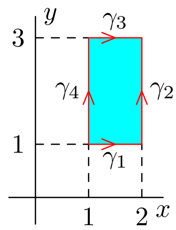
Můžeme vypočítat plošný integrál na levé straně

$$\iint_\kappa \operatorname{rot} \vec{f}\, d\vec{S} = \iint_{\langle 1,2 \rangle \times \langle 1,3 \rangle} (t - \frac{s}{ts}, -s + \frac{t}{st}, 0)(-s,-t,1)\, dtds =$$

$$= \iint_{\langle 1,2 \rangle \times \langle 1,3 \rangle} \left(-ts + \frac{s}{t} + st - \frac{t}{s} \right) dtds = \int_1^3 \underbrace{\left(\int_1^2 (\frac{s}{t} - \frac{t}{s}\, dt) \right)}_{=[s \ln |t| - \frac{t^2}{2s}]_1^2 = s \ln 2 - \frac{3}{2s}} ds =$$

$$= \int_1^3 \left(s \ln 2 - \frac{3}{2}\frac{1}{s} \right) ds = \left[\frac{s^2}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln s \right]_1^3 = \frac{9}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 2 = 4 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3 \ .$$

Okraj plochy γ se skládá ze čtyř částí $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$. U každé části uvedeme parametrické vyjádření, tečný vektor a příslušný křivkový integrál. Integrál přes křivku γ pak bude sestávat z integrálů přes jednotlivé části. Parametrické vyjádření první části γ_1 je



$$\gamma_1: \quad \begin{array}{l} x = t \\ y = 1 \\ \underline{z = t} \end{array} \qquad t \in \langle 1,2 \rangle \ , \ \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (1,0,1)$$

a tato část přispívá integrálem

$$\int_{\gamma_1} (t \ln t, \ln t, t)(1,0,1)\, dt = \int_1^2 (t + t \ln t)\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2 \ln t - \frac{1}{4}t^2 \right]_1^2 = \frac{3}{4} + 2 \ln 2 \ .$$

Podobně vypočítáme příspěvek druhé části γ_2

$$\gamma_2: \quad \begin{array}{l} x = 2 \\ y = t \\ z = 2t \end{array} \qquad t \in \langle 1, 3\rangle \ , \ \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, 1, 2)$$

$$\int_{\gamma_2} (2\ln 2t, t\ln 2t, 2t)(0,1,2)\, dt = \int_1^3 (t\ln 2 + t\ln t + 4t)\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\ln 2 + \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2 + 2t^2\right]_1^3 = 14 + 4\ln 2 + \frac{9}{2}\ln 3 \ .$$

Třetí část γ_3 má parametrické vyjádření

$$\gamma_3: \quad \begin{array}{l} x = t \\ y = 3 \\ z = 3t \end{array} \qquad t \in \langle 1, 2\rangle \ , \ \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (1, 0, 3)$$

a odečteme integrál

$$\int_{-\gamma_3} (t\ln 3t, 3\ln 3t, 3t)(1,0,3)\, dt = \int_1^2 (t\ln 3 + t\ln t + 9t)\, dt =$$

$$= \left[\frac{1}{2}t^2\ln 3 + \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{9}{2}t^2\right]_1^2 = \frac{3}{2}\ln 3 + 2\ln 2 + \frac{51}{4} \ .$$

Podobně odečteme integrál z poslední části γ_4

$$\gamma_4: \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{array} \qquad t \in \langle 1, 3\rangle \ , \ \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, 1, 1)$$

$$\int_{-\gamma_4} (\ln t, t\ln t, t)(0,1,1)\, dt = \int_1^3 (t\ln t + t)\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^2\right]_1^3 = 2 + \frac{9}{2}\ln 3 \ .$$

Celý křivkový integrál na pravé straně pak obdržíme prostým součtem či rozdílem

$$\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{r} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_4} =$$

$$= \frac{3}{4} + 2\ln 2 + 14 + 4\ln 2 + \frac{9}{2}\ln 3 - \frac{3}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{51}{4} - 2 - \frac{9}{2}\ln 3 = 4\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3 \ .$$

Stokesova věta je ověřena.

Doplníme ještě výpočet užitý ve všech čtyřech částech. Použili jsme integraci „per partes“ pro $f'(t) := t,\ f(t) = \frac{1}{2}t^2$ a $g(t) := \ln t,\ g'(t) = \frac{1}{t}$

$$\int t\ln t\, dt = \frac{1}{2}t^2\ln t - \int \frac{1}{2}t^2\frac{1}{t}\ dt = \frac{1}{2}t^2\ln t - \frac{1}{4}t^2 \ .$$

Příklad 12.6:

Ověřte Stokesovu větu pro funkci

$$\vec{f}(x,y,z) = (y^2 - xz, x^2 - yz, z)$$

a pro oblast

$$\kappa: \quad z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} \qquad x, y \in \langle -1, 1\rangle$$

s orientací v bodě $[0,0,2]$ ve směru vektoru $(0,0,1)$.

řešení:

Budeme ověřovat Stokesovu větu

$$\iint_\kappa \operatorname{rot} \vec{f}\, d\vec{S} = \int_\gamma \vec{f}\, d\vec{r} \ ,$$

kde křivka γ tvoří "okraj" plochy κ. Zjistíme rotaci na levé straně rovnosti

$$\operatorname{rot}\vec{f} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (y^2 - xz, x^2 - yz, z) = (y, -x, 2x - 2y) \ .$$

Pro výpočet plošného integrálu je třeba vypočítat normálový vektor

$$\vec{\nu} = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 1 \right) \ ,$$

(proměnné x a y můžeme považovat za parametry a $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$ za parametrické vyjádření z-tové souřadnice plochy).

Plošný integrál na levé straně je pak

$$\iint_\kappa \operatorname{rot}\vec{f}\, d\vec{S} = \iint_{\langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle} (y, -x, 2x-2y)(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, 1)\, dxdy =$$

$$= \iint_{\langle -1,1\rangle \times \langle -1,1\rangle} (\frac{xy}{1-x^2} - \frac{xy}{1-y^2} + 2x - 2y)\, dxdy = \int_{-1}^{1} y \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\, dx}}_{=0} dy +$$

$$+ \int_{-1}^{1} x \underbrace{\int_{-1}^{1} \frac{y}{\sqrt{1-y^2}\, dy}}_{=0} dx + 2\int_{-1}^{1} \underbrace{\left(\int_{-1}^{1} (x-y)\, dx \right)}_{\left[\frac{1}{2}x^2 - xy\right]_{-1}^{1} = -2y} dy = -2\int_{-1}^{1} 2y\, dy = -2\left[y^2\right]_{-1}^{1} = 0 \ .$$

Okraj plochy γ se skládá ze čtyř částí $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4$. U první části γ_1 uvedeme parametrické vyjádření,

$$\gamma_1 : \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = t \\ \underline{z = \sqrt{1-t^2}} \end{array} \qquad t \in \langle -1, 1\rangle \ , \qquad \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (0, 1, -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}})$$

a příslušný křivkový integrál

$$\int_{\gamma_1} (t^2 - \sqrt{1-t^2}, 1 - t\sqrt{1-t^2}, \sqrt{1-t^2})(0, 1, -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}})\, dt = \int_{-1}^{1} (1 - t\sqrt{1-t^2} - t)\, dt = 2 \ .$$

U dalších částí jsou výpočty podobné.

Celkově tedy křivkový na pravé straně vychází

$$\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{r} = 2 + 2 - 2 - 2 = 0$$

a Stokesova věta je ověřena.

Příklad 12.7:
Ověřte Stokesovu větu pro funkci

$$\vec{f}(x, y, z) = (-y, x, z)$$

a pro oblast

$$\kappa : \quad \begin{array}{l} x = r\sin t \\ y = r\cos t \\ \underline{z = r^2 \sin 2t} \end{array} \qquad \begin{array}{l} r \in \langle 0, 1\rangle \\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle \end{array} \ .$$

řešení:
Budeme ověřovat Stokesovu větu

$$\iint_\kappa \operatorname{rot}\vec{f}\, d\vec{S} = \int_\gamma \vec{f}\, d\vec{r} \ ,$$

kde křivka γ tvoří "okraj" plochy κ.

Zjistíme rotaci na levé straně rovnosti

$$\mathrm{rot}\,\vec{f} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (-y, x, z) = (0, 0, 2) \ .$$

Pro výpočet plošného integrálu je třeba vypočítat tečné vektory a jejich vektorový součin

$$\vec{\tau} = (\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}) = (\sin t, \cos t, 2r \sin 2t) \quad \vec{\sigma} = (\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}) = (r\cos t, -r\sin t, 2r^2 \cos 2t) \ ,$$

$$\begin{aligned}\vec{\nu} = \vec{\tau} \times \vec{\sigma} &= (\sin t, \cos t, 2r\sin 2t) \times (r\cos t, -r\sin t, 2r^2\cos 2t) = \\ &= (2r^2(\cos t\cos 2t + \sin t \sin 2t), 2r^2(\sin 2t \cos t - \cos 2t \sin t), -r) \ .\end{aligned}$$

Můžeme vypočítat plošný integrál na levé straně

$$\iint_\kappa \mathrm{rot}\,\vec{f}\,d\vec{S} = \iint_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle} -2r\,dr\,dt = \left[-r^2\right]_0^1 \cdot [t]_0^{2\pi} = -2\pi \ .$$

Okraj plochy γ má parametrické vyjádření

$$\gamma_1: \quad \begin{array}{l} x = \sin t \\ y = \cos t \\ \underline{z = \sin 2t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle \ , \ \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\cos t, -\sin t, 2\cos 2t)$$

a křivkový integrál na pravé straně rovnosti je

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{f}\,d\vec{r} &= \int_\gamma (-\cos t, \sin t, \sin 2t)(\cos t, -\sin t, 2\cos 2t)\,dt = \\ &= \int_0^{2\pi} (-1 + 2\sin 2t\cos 2t)\,dt = -2\pi + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin 4t\,dt}_{=0} = -2\pi \ .\end{aligned}$$

Stokesova věta je ověřena.

Příklad 12.8:
Ověřte Stokesovu větu pro funkci

$$\vec{f}(x, y, z) = (z, xy, xy)$$

a pro oblast

$$\kappa: \quad \begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ \underline{z = r^2 \cos^2 t} \end{array} \qquad \begin{array}{l} r \in \langle 0, 1\rangle \\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle \end{array} \ .$$

řešení:
Budeme ověřovat Stokesovu větu

$$\iint_\kappa \mathrm{rot}\,\vec{f}\,d\vec{S} = \int_\gamma \vec{f}\,d\vec{r} \ ,$$

kde křivka γ tvoří "okraj" plochy κ.

Zjistíme rotaci na levé straně rovnosti

$$\mathrm{rot}\,\vec{f} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times (z, xy, xy) = (x, 1 + y, y) \ .$$

Pro výpočet plošného integrálu je třeba vypočítat tečné vektory a jejich vektorový součin

$$\vec{\tau} = (\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r}) = (\cos t, \sin t, 2r\cos^2 t) \quad \vec{\sigma} = (\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}) = (-r\sin t, r\cos t, -2r^2 \sin t\cos t) \ ,$$

$$\vec{\nu} = \vec{\tau} \times \vec{\sigma} = (\cos t, \sin t, 2r\cos^2 t) \times (-r\sin t, r\cos t, -2r^2 \sin t\cos t) = (-2r^2\cos t, 0, r)\ .$$

Můžeme vypočítat plošný integrál na levé straně

$$\iint_\kappa \operatorname{rot} \vec{f}\, d\vec{S} = \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi)} (r\cos t, 1 + r\sin t, r\sin t)\cdot(-2r^2\cos t, 0, r)\, dr\, dt =$$

$$= \iint_{\langle 0,1\rangle\times\langle 0,2\pi)} (r^2\sin t - 2r^3\cos^2 t)\, dr\, dt = \underbrace{\int_0^1 r^2\, dr}_{=\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t\, dt}_{=0} - 2\underbrace{\int_0^1 r^2\, dr}_{=\frac{1}{4}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t\, dt}_{=\frac{1}{2}[t+\sin t\cos t]_0^{2\pi}=\pi} = -\frac{\pi}{2}\ .$$

Okraj plochy γ má parametrické vyjádření

$$\gamma_1:\quad \begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin t \\ \underline{z = \cos^2 t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, 2\pi)\ ,\ \text{tečný vektor } \vec{\tau} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (-\sin t, \cos t, -2\sin t\cos t)$$

a křivkový integrál na pravé straně rovnosti je

$$\int_\gamma \vec{f}\, d\vec{r} = \int_\gamma (\cos^2 t, \sin t\cos t, \sin t\cos t)(-\sin t, \cos t, -2\sin t\cos t)\, dt =$$

$$= -\int_0^{2\pi} 2\sin^2 t\cos^2 t)\, dt = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2 2t\, dt = -\frac{1}{4}\int_0^{4\pi} \sin^2 w\, dw = -\frac{1}{8}\left[w - \sin w\cos w\right]_0^{4\pi} = -\frac{\pi}{2}\ .$$

Stokesova věta je ověřena.

Příklad 12.9:

Ověřte Gaussovu - Ostrogradského větu pro funkci

$$\vec{f}(x, y, z) = (x^3 z, x^2 yz, x^2 z^2)$$

a pro oblast $\Omega = \{[x, y, z]; 0 \le z \le \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

řešení:

Gaussova - Ostrogradského věta má tvar

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{f}\, d\vec{S}\ .$$

Derivováním obdržíme výraz v trojném integrálu na levé straně rovnosti

$$\operatorname{div} \vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x^3 z, x^2 yz, x^2 z^2) = 3x^2 z + x^2 z + 2x^2 z = 6x^2 z\ .$$

Definiční obor funkce $z = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$ je čtverec $\langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$ a oblast Ω se skládá ze všech bodů $[x, y, z]$, pro které $0 \le z \le \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$, $-1 \le y \le 1$ a $-1 \le x \le 1$.
Levou stranu pak počítáme pomocí Fubiniovy věty

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{f}\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Omega 6x^2 z\, dx\, dy\, dz = \iint_{\langle -1,1\rangle\times\langle -1,1\rangle} \left(\int_0^{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} 6x^2 z dz\right) dxdy =$$

$$= \iint_{\langle -1,1\rangle\times\langle -1,1\rangle} 6x^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} dxdy = 3\iint_{\langle -1,1\rangle\times\langle -1,1\rangle} x^2(1-x^2)(1-y^2)\, dxdy =$$

$$= 3\int_{-1}^1 (x^2 - x^4)\, dx \cdot \int_{-1}^1 (1-y^2)\, dy = 3\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_1^1 \cdot \left[y - \frac{y^3}{3}\right]_1^1 = 3\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{4}{3} = \frac{16}{15}\ .$$

Obraťme pozornost k pravé straně Gaussovy - Ostrogradského věty. Hranice $\partial\Omega$ se skládá ze dvou částí κ_1 a κ_2, jež můžeme vyjídřit také parametricky

$$\kappa_1:\quad \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ \underline{z = \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}} \end{array} \qquad x, y \in \langle -1, 1\rangle \qquad\qquad \kappa_2:\quad \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ \underline{z = 0} \end{array} \qquad x, y \in \langle -1, 1\rangle\ .$$

Pro výpočet plošného integrálu přes první část budeme potřebovat tečné vektory $\vec{\tau}$, $\vec{\sigma}$ a normálový vektor $\vec{\nu}$

$$\vec{\tau} = (\frac{\partial}{\partial x}\,x, \frac{\partial}{\partial x}\,y, \frac{\partial}{\partial x}\,\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}) = (1, 0, -x\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}})$$
$$\vec{\sigma} = (\frac{\partial}{\partial y}\,x, \frac{\partial}{\partial y}\,y, \frac{\partial}{\partial y}\,\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}) = (0, 1, -y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}})$$
$$\vec{\nu} = \vec{\tau}\times\vec{\sigma} = (\det\begin{pmatrix}\tau_2 & \tau_3\\ \sigma_2 & \sigma_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_3\\ \sigma_1 & \sigma_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\tau_1 & \tau_2\\ \sigma_1 & \sigma_2\end{pmatrix}) = (x\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}, y\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}, 1)\,.$$

Počítejme plošný integrál z funkce $\vec{f}$ přes κ_1

$$\iint_{\kappa_1} \vec{f}\,d\vec{S} = \iint_{\langle -1,1\rangle\times\langle -1,1\rangle} (x^3\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\ ,\ x^2y\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}, x^2\frac{1-y^2}{1-x^2})\cdot(x\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}, y\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}, 1)\,dxdy =$$
$$= \iint_{\langle -1,1\rangle\times\langle -1,1\rangle} \left(x^4(1-y^2) + x^2y^2(1-x^2) + x^2(1-x^2)(1-y^2)\right)\,dxdy = \int_{-1}^{1}(\int_{-1}^{1}\left(x^2 - y^2x^4\right)\,dx)\,dy =$$
$$= \int_{-1}^{1}\left[\frac{x^3}{3} - y^2\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1}\,dy = \int_{-1}^{1}(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}y^2)\,dy = \left[\frac{2}{3}y - \frac{2}{5}\cdot\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 2\cdot\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{15}\right) = \frac{16}{15}\,.$$

Plošný integrál přes druhou část je roven nule, neboť funkce $\vec{f}$ je na κ_2 také nulová.
Proto pravá strana je celkově rovna

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{f}\,d\vec{S} = \iint_{\kappa_1} + \iint_{\kappa_2} = \frac{16}{15} + 0 = \frac{16}{15}$$

a Gaussova - Ostrogradského věta je ověřena.

Následující příklad je početně značně komplikovaný.

Příklad 12.10:

Ověřte Gaussovu - Ostrogradského větu pro funkci

$$\vec{f}(x,y,z) = (x^2yz, xy^2z, z^3\sqrt{x^2+y^2})$$

a pro oblast $\Omega = \{[x,y,z]; x^2+y^2+z^2 \le 4,\ 3(x^2+y^2)\le z,\ 0\le z\}$.

řešení:

Gaussova - Ostrogradského věta má tvar

$$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega}\vec{f}\,d\vec{S}\,.$$

Derivováním obdržíme výraz v trojném integrálu na levé straně rovnosti

$$\operatorname{div}\vec{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(x^2yz, xy^2z, z^3\sqrt{x^2+y^2}) = 4xyz + 3z^2\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Trojný integrál na levé straně Gaussovy - Ostrogradského věty budeme počítat převodem do sférických souřadnic

$$\Phi:\quad \begin{array}{l} x = r\cos t\sin s\\ y = r\sin t\sin s\\ z = r\cos s \end{array}\qquad 0\le r\le 2,\ 0\le t<2\pi,\ 0\le s\le\frac{\pi}{6}\qquad |\det D\Phi| = r^2\sin s\,,$$

meze pro r dostaneme z první podmínky $r^2 = x^2+y^2+z^2 \le 4$ vymezující Ω, meze pro s pak dostaneme dosazením do druhé podmínky $3(x^2+y^2)\le z^2$, odkud dostaneme $3r^2\sin^2 s \le r^2\cos^2 s$, $\operatorname{tg} s \le \frac{1}{\sqrt{3}}$ a $s\le\frac{\pi}{6}$.
Počítejme levou stranu

$$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{f}\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\Omega}(4xyz + 3z^2\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy\,dz = \iint_{\langle 0,2\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle\times\langle 0,\frac{\pi}{6}\rangle} 3r^5\sin^2 s\cos^2 s\,dr\,dt\,ds =$$
$$= 4\underbrace{\int_0^2 r^5\,dr}_{=\frac{32}{3}}\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt}_{=0}\cdot\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^3 s\cos s\,ds}_{=\frac{1}{64}} + 3\underbrace{\int_0^2 r^5\,dr}_{=\frac{32}{3}}\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}dt}_{=2\pi}\cdot\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 s\sin^2 s\,ds}_{=A=\frac{4\pi-3\sqrt{3}}{192}} = \pi\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right)\,.$$

Krátce naznačíme výpočet integrálu A (při použití substituce $w := 2s$)

$$A = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2s\, ds = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 w\, dw = \frac{1}{16}\left[w - \sin w \cos w\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{192}\ .$$

Obraťme pozornost k pravé straně Gaussovy - Ostrogradského věty. Hranice $\partial\Omega$ se skládá ze dvou částí κ_1 a κ_2. Uvedeme parametrické vyjádření první části

$$\kappa_1: \quad \begin{array}{l} x = 2\cos t \sin s \\ y = 2\sin t \sin s \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\ s \in \langle 0, \frac{\pi}{6}\rangle\ . \\ \underline{z = 2\cos s} \end{array}$$

její tečné vektory $\vec{\tau}$, $\vec{\sigma}$ a (vnější) normálový vektor $\vec{\nu}$

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= (\frac{\partial}{\partial t} 2\cos t \sin s, \frac{\partial}{\partial t} 2\sin t \sin s, \frac{\partial}{\partial t} 2\cos s) = (-22\sin t \sin s, 2\cos t \sin s, 0) \\
\vec{\sigma} &= (\frac{\partial}{\partial s} 2\cos t \sin s, \frac{\partial}{\partial s} 2\sin t \sin s, \frac{\partial}{\partial s} 2\cos s,) = (2\cos t \cos s, 2\sin t \sin s, -2\sin s) \\
\vec{\nu} = \vec{\sigma} \times \vec{\tau} &= (\det\begin{pmatrix}\sigma_2 & \sigma_3\\ \tau_2 & \tau_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_3\\ \tau_1 & \tau_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2\\ \tau_1 & \tau_2\end{pmatrix}) = (4\cos t \sin^2 s, 4\sin t \sin^2 s, 4\sin s \cos s)\ .
\end{aligned}$$

Počítejme plošný integrál z funkce $\vec{f}$ přes κ_1

$$\begin{aligned}
\iint_{\kappa_1} \vec{f}\, d\vec{S} = \iint_{\langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{6}\rangle} &(16\sin t \cos^2 t \sin^3 s \cos s, 16\sin^2 t \cos t \sin^3 s \cos s, 16\sin s \cos^3 s)\cdot \\
&\cdot (4\cos t \sin^2 s, 4\sin t \sin^2 s, 4\sin s \cos s)\, dt\, ds = \\
= 64 \iint_{\langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{6}\rangle} &\sin t \cos t \sin^5 s \cos s\, dt\, ds + 64 \iint_{\langle 0,2\pi\rangle \times \langle 0,\frac{\pi}{6}\rangle} \sin^2 s \cos^4 s\, dt\, ds = \\
= 64 &\underbrace{\int_0^{2\pi} \sin t \cos t\, dt}_{=0} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 s \cos s\, ds}_{=\frac{1}{384}} + 64 \underbrace{\int_0^{2\pi} dt}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 s \cos^2 s\, ds}_{=B=\frac{\pi}{96}} = 64 \cdot 2\pi \cdot \frac{\pi}{96} = \frac{4}{3}\pi^2\ .
\end{aligned}$$

Opět naznačíme výpočet integrálu B (při použití substituce $w := \operatorname{tg} s$, $ds = \cos^2 s\, dw = \frac{1}{1+w^2}\, dw$, $\cos^2 s = \frac{1}{1+w^2}$, $\sin^2 s = \frac{w^2}{1+w^2}$, $0 \rightsquigarrow 0$ a $\frac{\pi}{6} \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{3}}$)

$$\begin{aligned}
B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 s \cos^4 s\, ds = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{w^2}{(1+w^2)^4}\, dw &= \\
= \left[-\frac{1}{6}\cdot\frac{w}{(1+w^2)^3} + \frac{1}{24}\cdot\frac{w}{(1+w^2)^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{w}{1+w^2} + \frac{1}{16}\cdot \operatorname{arctg} w\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} &= \frac{\pi}{96}\ .
\end{aligned}$$

Neurčitý integrál typu $I_n = \int \frac{dw}{(1+w^2)^n}$ počítáme pomocí rekurentních vzorců získaných postupným užitím metody „per partes“

$$\begin{aligned}
I_1 &= \operatorname{arctg} w + c \\
2I_2 &= \frac{w}{1+w^2} + I_1 \\
4I_3 &= \frac{w}{(1+w^2)^2} + 3I_2 = \frac{w}{(1+w^2)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{w}{1+w^2} + \frac{3}{2}I_1 \\
6I_4 &= \frac{w}{(1+w^2)^3} + 5I_3 = \frac{w}{(1+w^2)^3} + \frac{5}{4}\cdot\frac{w}{(1+w^2)^2} + \frac{15}{8}\cdot\frac{w}{1+w^2} + \frac{15}{8}I_1\ .
\end{aligned}$$

Odtud dostaneme

$$I_3 = \frac{1}{4}\cdot\frac{w}{(1+w^2)^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{w}{1+w^2} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} w\,, \quad I_4 = \frac{1}{6}\cdot\frac{w}{(1+w^2)^3} + \frac{5}{24}\cdot\frac{w}{(1+w^2)^2} + \frac{15}{48}\cdot\frac{w}{1+w^2} + \frac{15}{48}\operatorname{arctg} w$$

$$\text{a} \quad \int \frac{w^2}{(1+w^2)^4} = I_3 - I_4 = -\frac{1}{6}\cdot\frac{w}{(1+w^2)^3} + \frac{1}{24}\cdot\frac{w}{(1+w^2)^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{w}{1+w^2} + \frac{1}{16}\operatorname{arctg} w\ .$$

Podobně budem počítat plošný integrál přes druhou část κ_2

$$\kappa_2: \quad \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}r\cos t \\ y = \frac{1}{2}r\sin t \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2}r \\ \hline \end{array} \qquad r \in \langle 0, 2\rangle \; t \in \langle 0, 2\pi\rangle \,,$$

s tečnými vektory $\vec{\tau}$, $\vec{\sigma}$ a (vnějším) normálovým vektorem $\vec{\nu}$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \left(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{2}r\cos t, \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{2}r\sin t, \frac{\partial}{\partial r}\frac{\sqrt{3}}{2}r\right) = \left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\sin t, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \vec{\sigma} &= \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}r\cos t, \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}r\sin t, \frac{\partial}{\partial t}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}r\cos t, -\frac{\sqrt{3}}{4}r\sin t, 0\right) \\ \vec{\nu} = \vec{\sigma}\times\vec{\tau} &= \left(\det\begin{pmatrix}\sigma_2 & \sigma_3\\ \tau_2 & \tau_3\end{pmatrix}, -\det\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_3\\ \tau_1 & \tau_3\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2\\ \tau_1 & \tau_2\end{pmatrix}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}r\cos t, \frac{\sqrt{3}}{4}r\sin t, -\frac{1}{4}r\right). \end{aligned}$$

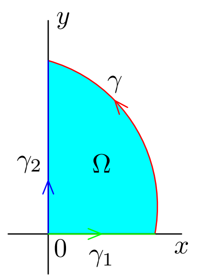
Dostamene

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\kappa_2} \vec{f}\,d\vec{S} &= \iint_{\langle 0,2\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle} \left(\frac{\sqrt{3}}{16}r^4\sin t\cos^2 t, \frac{\sqrt{3}}{16}r^4\sin^2 t\cos t, \frac{3\sqrt{3}}{16}r\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{4}r\cos t, \frac{\sqrt{3}}{4}r\sin t, -\frac{1}{4}r\right)dr\,dt = \\ &= \iint_{\langle 0,2\rangle\times\langle 0,2\pi\rangle} \left(\frac{3}{64}r^5\sin t\cos t - \frac{3\sqrt{3}}{64}r^5\right)dr\,dt = \\ &= \frac{3}{64}\underbrace{\int_0^2 r^5\,dr}_{=\frac{32}{3}}\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt}_{=0} - \frac{3\sqrt{3}}{64}\underbrace{\int_0^2 r^5\,dr}_{=\frac{32}{3}}\cdot\underbrace{\int_0^{2\pi}dt}_{=2\pi} = -\sqrt{3}\pi \end{aligned}$$

Proto pravá strana je celkově rovna

$$\iint_{\partial\Omega}\vec{f}\,d\vec{S} = \iint_{\kappa_1} + \iint_{\kappa_2} = -\sqrt{3}\pi + \frac{4}{3}\pi^2$$

a Gaussova - Ostrogradského věta je ověřena.



Příklady na výpočet obsahu rovinného obrazce ohraničeného křivkou (v prvním kvadrantu) a osami x a y řešíme postupem založeným na Greenově větě v uvedeném tvaru

$$\int_\Omega\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)dx\,dy = \int_{\partial\Omega}\vec{f}\cdot d\vec{r}\,.$$

Užijeme ji pro funkci $\vec{f}(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$ a oblast Ω na obrázku. Pro tuto funkci platí

$$-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1\,.$$

Hranice oblasti Ω se skládá ze tří částí $\partial\Omega = \gamma_1 + \gamma - \gamma_2$. Obsah rovinného obrazce lze vypočítat jako dvojný integrál přes zadanou oblast, neboli

$$\begin{aligned} P = \iint_\Omega 1\,dx\,dy = \iint_\Omega\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)dx\,dy = \int_{\partial\Omega}\vec{f}\cdot d\vec{r} = \\ = \underbrace{\int_{\gamma_1}\vec{f}\cdot d\vec{r}}_{=0} + \int_\gamma\vec{f}\cdot d\vec{r} - \underbrace{\int_{\gamma_2}\vec{f}\cdot d\vec{r}}_{=0} = \frac{1}{2}\int_\gamma(-y,x)\cdot d\vec{r}\,. \end{aligned}$$

Ověřme ještě, že skutečně integrály přes části γ_1 a γ_2 jsou rovny nule.
První část γ_1 můžeme parametrizovat následovně

$$\gamma_1: \quad \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ \hline \end{array} \qquad t \in \langle 0, t_1\rangle \quad \text{(pro jisté } t_1\text{)}.$$

Vypočítáme tečný vektor $\vec{\tau} = (t', 0') = (1, 0)$ a dosazením obdržíme

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} (0, t) \cdot (1, 0)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} 0\, dt = 0\,.$$

Podobně pro γ_2 s parametrizací například

$$\gamma_2 : \quad \begin{array}{c} x = 0 \\ \underline{y = t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, t_2 \rangle \qquad \text{(pro jisté } t_2\text{)},$$

máme tečný vektor $\vec{\tau} = (0', t') = (0, 1)$, a tedy

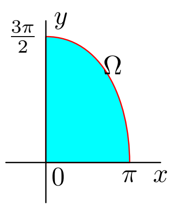
$$\int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^{t_2} (-t, 0) \cdot (0, 1)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{t_2} 0\, dt = 0\,.$$

V následujících příkladech tedy nebudeme opakovat uvedené úvahy, ale budeme se odvolávat na odvozený vztah

$$P = \frac{1}{2} \int_\gamma (-y, x) d\vec{r}\,.$$

Příklad 12.11:
Vypočítejte obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkou γ, osou x a y, kde

$$\gamma : \quad \begin{array}{c} x = (t + \pi)\, \cos t \\ \underline{y = (t + \pi)\, \sin t} \end{array} \qquad t \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2} \rangle\,.$$



řešení:
Jak jsme pověděli v úvodu, užijeme odvozený vzorec

$$P = \frac{1}{2} \int_\gamma (-y, x)\, d\vec{r}\,.$$

Nejprve vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left(((t + \pi) \cos t)'\,, ((t + \pi) \sin t)' \right) = \left(\cos t - (t + \pi) \sin t\,, \sin t + (t + \pi) \cos t \right)\,,$$

abychom mohli užít vztah $d\vec{r} = \vec{\tau} \cdot dt$. Dále vypočítáme

$$(-y, x)\, d\vec{r} = (-y, x)\vec{\tau}\, dt = \left(-(t + \pi) \sin t\,, (t + \pi) \cos t \right) \cdot \left(\cos t - (t + \pi) \sin t\,, \sin t + (t + \pi) \cos t \right)\, dt =$$
$$= \left(-(t + \pi) \sin t \cos t + (t + \pi)^2 \sin^2 t + (t + \pi) \sin t \cos t + (t + \pi)^2 \cos^2 t \right)\, dt = (t + \pi)^2\, dt$$

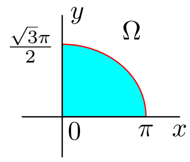
a pokračujeme

$$P = \frac{1}{2} \int_\gamma (-y, x) d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t + \pi)^2\, dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (t + \pi)^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{19}{48} \pi^3\,.$$

Druhá možnost spočívá ve výpočtu dvojného integrálu převodem do polárních souřadnic

$$P = \int_\Omega 1\, dx\, dy = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} r\, dr\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\underbrace{\int_0^{t+\pi} r\, dr}_{= \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{t+\pi} = \frac{1}{2}(t+\pi)^2} \Big)\, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t + \pi)^2\, dt = \frac{1}{6} \left[(t + \pi)^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{19}{48} \pi^3\,.$$

Příklad 12.12:
Vypočítejte obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkou γ, osou x a y, kde



$$\gamma: \quad \begin{array}{l} x = \sqrt{\pi^2 - t^2}\,\cos t \\ y = \sqrt{\pi^2 - t^2}\,\sin t \end{array} \qquad t \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2} \rangle .$$

řešení:
Opět užijeme odvozený vzorec

$$P = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y, x) d\vec{r} .$$

Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((\sqrt{\pi^2 - t^2}\,\cos t)' , (\sqrt{\pi^2 - t^2}\,\sin t)' \right) = \left(\frac{-t}{\sqrt{\ }}\cos t - \sqrt{\ }\,\sin t \,, \frac{-t}{\sqrt{\ }}\sin t + \sqrt{\ }\,\cos t \right) ,$$

abychom mohli užít vztah $d\vec{r} = \vec{\tau} \cdot dt$. Dále vypočítáme

$$\begin{aligned} (-y, x)\, d\vec{r} &= (-y, x)\vec{\tau}\, dt = \\ &= (-\sqrt{\ }\,\sin t \,, \sqrt{\ }\,\cos t) \cdot \left(\frac{-t}{\sqrt{\ }}\cos t - \sqrt{\ }\,\sin t \,, \frac{-t}{\sqrt{\ }}\sin t + \sqrt{\ }\,\cos t \right) dt = \\ &= \left(t \sin t \cos t + \sqrt{\ }^2 \sin^2 t - t \sin t \cos t + \sqrt{\ }^2 \cos^2 t \right) dt = (\pi^2 - t^2)\, dt \end{aligned}$$

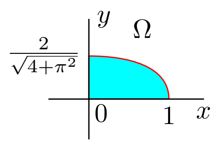
a pokračujeme

$$P = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y, x) d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi^2 - t)\, dt = \frac{1}{2}\left[\pi^2 t - \frac{1}{3}t^3 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^3}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^3}{8} \right) = \frac{11}{48}\pi^3 .$$

Druhá možnost spočívá ve výpočtu dvojného integrálu převodem do polárních souřadnic (zde bychom však měli být opatrní kolem počátku)

$$P = \int_\Omega 1\, dx\, dy = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} r\, dr\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{\int_0^{\sqrt{\pi^2 - t^2}} r\, dr}_{= \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{\sqrt{\pi^2 - t^2}} = \frac{1}{2}(\pi^2 - t^2)})\, dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi^2 - t^2)\, dt = \frac{11}{48}\pi^3 .$$

Příklad 12.13:
Vypočítejte obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkou γ, osou x a y, kde



$$\gamma: \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{\cos t}{\sqrt{1 + t^2}} \\ y = \dfrac{\sin t}{\sqrt{1 + t^2}} \end{array} \qquad t \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2} \rangle .$$

řešení:
Opět užijeme odvozený vzorec

$$P = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y, x) d\vec{r} .$$

Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((\frac{\cos t}{\sqrt{1 + t^2}})' , (\frac{\sin t}{\sqrt{1 + t^2}})' \right) = \left(\frac{-\sin t \sqrt{\ } - \cos t \frac{t}{\sqrt{\ }}}{(\sqrt{\ })^2} , \frac{\cos t \sqrt{\ } - \sin t \frac{t}{\sqrt{\ }}}{(\sqrt{\ })^2} \right) ,$$

abychom mohli užít vztah $d\vec{r} = \vec{\tau} \cdot dt$. Dále vypočítáme

$$(-y,x)\,d\vec{r} = (-y,x)\vec{\tau}\,dt = \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{\quad}}\,,\ \frac{\cos t}{\sqrt{\quad}} \right) \cdot \left(\frac{-\sin t\sqrt{\quad} - \cos t\,\frac{t}{\sqrt{\quad}}}{\sqrt{\quad}^{2}}\,,\ \frac{\cos t\sqrt{\quad} - \sin t\,\frac{t}{\sqrt{\quad}}}{(\sqrt{\quad})^2} \right) dt =$$

$$= \left(\frac{\sin^2 t}{(\sqrt{\quad})^2} + \frac{t\sin t\cos t}{(\sqrt{\quad})^4} + \frac{\cos^2 t}{(\sqrt{\quad})^2} - \frac{t\sin t\cos t}{(\sqrt{\quad})^4} \right) dt = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

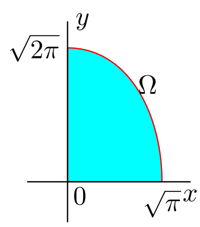
a pokračujeme

$$P = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y,x)d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arctg} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\ dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\,.$$

Druhá možnost spočívá ve výpočtu dvojného integrálu převodem do polárních souřadnic (zde bychom však měli být opatrní kolem počátku)

$$P = \int_\Omega 1\,dx\,dy = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} r\,dr\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\underbrace{\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} r\,dr}_{=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+t^2}} \Big)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\,.$$

Příklad 12.14:
Vypočítejte obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkou γ, osou x a y, kde



$$\gamma: \quad \begin{aligned} x &= \sqrt{2t+\pi}\cos t \\ y &= \sqrt{2t+\pi}\sin t \end{aligned} \qquad t \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2} \rangle\,.$$

řešení:
Opět užijeme odvozený vzorec

$$P = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y,x)d\vec{r}\,.$$

Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((\sqrt{2t+\pi}\cos t)'\,,\ (\sqrt{2t+\pi}\sin t)' \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\quad}}\cos t - \sqrt{\quad}\sin t\,,\ \frac{1}{\sqrt{\quad}}\sin t + \sqrt{\quad}\cos t \right),$$

abychom mohli užít vztah $d\vec{r} = \vec{\tau} \cdot dt$. Dále vypočítáme

$$(-y,x)\,d\vec{r} = (-y,x)\vec{\tau}\,dt =$$

$$= \left(-\sqrt{2t+\pi}\sin t\,,\ \sqrt{2t+\pi}\cos t \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\quad}}\cos t - \sqrt{\quad}\sin t\,,\ \frac{1}{\sqrt{\quad}}\sin t + \sqrt{\quad}\cos t \right) dt =$$

$$= \left(-\sin t\cos t + (2t+\pi)\sin^2 t + \sin t\cos t + (2t+\pi)\cos^2 t \right)\ dt = (2t+\pi)\,dt$$

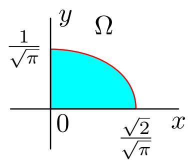
a pokračujeme

$$P = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y,x)d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2t+\pi)\,dt = \frac{1}{2}\left[t^2+\pi t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\ dt = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{2}\right) = \frac{3}{8}\pi^2\,.$$

Druhá možnost spočívá opět ve výpočtu dvojného integrálu převodem do polárních souřadnic (zde bychom však měli být opatrní kolem počátku)

$$P = \int_\Omega 1\,dx\,dy = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} r\,dr\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\underbrace{\int_0^{\sqrt{2t+\pi}} r\,dr}_{=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2t+\pi}} = \frac{1}{2}(2t+\pi)} \Big)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2t+\pi)\,dt = \frac{3}{8}\pi^2\,.$$

Příklad 12.15:
Vypočítejte obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkou γ, osou x a y, kde



$$\gamma: \quad \begin{aligned} x &= \frac{\cos t}{\sqrt{t+\frac{\pi}{2}}} \\ y &= \frac{\sin t}{\sqrt{t+\frac{\pi}{2}}} \end{aligned} \qquad t \in \langle 0, \tfrac{\pi}{2}\rangle .$$

řešení:
Opět užijeme odvozený vzorec

$$P = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y, x) d\vec{r}\,.$$

Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((\frac{\cos t}{\sqrt{t+\frac{\pi}{2}}})', (\frac{\sin t}{\sqrt{t+\frac{\pi}{2}}})' \right) = \left(\frac{-\sin t\sqrt{\ \ } - \cos t\,\frac{1}{2\sqrt{\ \ }}}{(\sqrt{\ \ })^2}, \frac{\cos t\sqrt{\ \ } - \sin t\,\frac{1}{2\sqrt{\ \ }}}{(\sqrt{\ \ })^2} \right),$$

abychom mohli užít vztah $d\vec{r} = \vec{\tau}\cdot dt$. Dále vypočítáme

$$(-y,x)\,d\vec{r} = (-y,x)\vec{\tau}\,dt = \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{\ \ }}, \frac{\cos t}{\sqrt{\ \ }} \right)\cdot \left(\frac{-\sin t\sqrt{\ \ } - \cos t\,\frac{1}{2\sqrt{\ \ }}}{(\sqrt{\ \ })^2}, \frac{\cos t\sqrt{\ \ } - \sin t\,\frac{1}{2\sqrt{\ \ }}}{(\sqrt{\ \ })^2} \right) dt =$$
$$= \left(\frac{\sin^2}{(\sqrt{\ \ })^2} + \frac{\sin t\cos t}{2(\sqrt{\ \ })^4} + \frac{\cos^2}{(\sqrt{\ \ })^2} - \frac{\sin t\cos t}{2(\sqrt{\ \ })^4} \right) dt = \frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\,dt$$

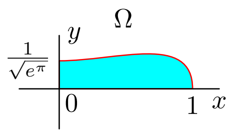
a pokračujeme

$$P = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y,x)d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln(t+\frac{\pi}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\ln\pi - \ln\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Druhá možnost spočívá opět ve výpočtu dvojného integrálu převodem do polárních souřadnic (zde bychom však měli být opatrní kolem počátku)

$$P = \int_\Omega 1\,dx\,dy = \int_{\Phi^{-1}(\Omega)} r\,dr\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\underbrace{\int_0^{\sqrt{\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}}} r\,dr}_{=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}})\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t+\frac{\pi}{2}}\,dt = \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Příklad 12.16:
Vypočítejte obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkou γ, osou x a y, kde



$$\gamma: \quad \begin{aligned} x &= \mathrm{e}^{-t}\cos t \\ y &= \mathrm{e}^{-t}\sin t \end{aligned} \qquad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle .$$

řešení:
Opět užijeme odvozený vzorec

$$P = \frac{1}{2}\int_\gamma (-y, x) d\vec{r}\,.$$

Vypočítáme tečný vektor

$$\vec{\tau} = \left((\mathrm{e}^{-t}\cos t)', (\mathrm{e}^{-t}\sin t)' \right) = \left(-\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t, -\mathrm{e}^{-t}\sin t + \mathrm{e}^{-t}\cos t \right),$$

abychom mohli užít vztah $d\vec{r} = \vec{\tau}\cdot dt$. Dále vypočítáme

$$(-y,x)\,d\vec{r} = (-y,x)\vec{\tau}\,dt = \left(-\mathrm{e}^{-t}\sin t, \mathrm{e}^{-t}\cos t \right)\cdot\left(-\mathrm{e}^{-t}\cos t - \mathrm{e}^{-t}\sin t, -\mathrm{e}^{-t}\sin t + \mathrm{e}^{-t}\cos t \right) dt =$$
$$= \left(\mathrm{e}^{-2t}\sin t\cos t + \mathrm{e}^{-2t}\sin^2 t - \mathrm{e}^{-2t}\sin t\cos t + \mathrm{e}^{-2t}\cos^2 t \right) dt = \mathrm{e}^{-2t}\,dt$$

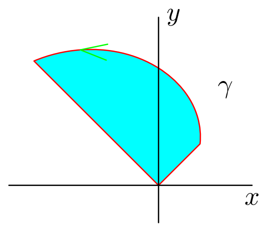
a pokračujeme

$$P=\frac{1}{2}\int_\gamma(-y,x)d\vec{r}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-2t}\,dt=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\,dt=-\frac{1}{4}\cdot\left(\mathrm{e}^{-\pi}-1\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}}\right).$$

Druhá možnost spočívá opět ve výpočtu dvojného integrálu převodem do polárních souřadnic (zde bychom však měli být opatrní kolem počátku)

$$P=\int_\Omega 1\,dx\,dy=\int_{\Phi^{-1}(\Omega)}r\,dr\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\underbrace{\int_0^{\mathrm{e}^{-t}}r\,dr}_{=\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\mathrm{e}^{-t}}=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}})\,dt=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{-2t}\,dt=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}}\right).$$

Příklad 12.17:



Vypočítejte obsah rovinného útvaru nakresleného na obrázku, kde křivka γ má vyjádření

$$\gamma:\quad \begin{aligned} x&=t\cos t\\ y&=t\sin t\end{aligned}\qquad t\in\langle\tfrac{\pi}{4},\tfrac{3\pi}{4}\rangle\,.$$

řešení:

Podobně jako v předchozích příkladech užijeme Greenovu větu pro funkci $\vec{f}(x,y)=\frac{1}{2}(-y,x)$ a oblast Ω. Hranice $\partial\Omega$ se skládá ze tří částí $\partial\Omega=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$. Platí tedy

$$P=\iint_\Omega 1\,dx\,dy=\iint_\Omega\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)dx\,dy=\int_{\partial\Omega}\vec{f}\,d\vec{r}=$$

$$=\underbrace{\int_{\gamma_1}\vec{f}\,d\vec{r}}_{=0}+\underbrace{\int_{\gamma}\vec{f}\,d\vec{r}}_{=\frac{\pi^3}{48}}+\underbrace{\int_{\gamma_2}\vec{f}\,d\vec{r}}_{=0}=\frac{\pi^3}{48}\,.$$

Vypočítáme křivkový integrál přes křivku γ, jejíž tečný vektor je $\vec{\tau}=((t\cos t)',(t\sin t)')=(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t)$ a

$$\int_\gamma\vec{f}\,d\vec{r}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{2}(-t\sin t,t\cos t)\cdot(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t)\,dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}t^2\,dt=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{\pi^3}{48}\,.$$

Pro γ_1 a γ_2 je příslušný křivkový integrál opět roven nule.

13. Řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace

Pro derivaci funkce f platí vzorec

$$\mathcal{L}_{f'}(p) = p \cdot \mathcal{L}_f(p) - f(0^+) \ .$$

S jeho pomocí budeme počítat derivace řešení diferenciálních rovnic. Dále budeme využívat další vzorce a pravidla pro Laplaceovu transformaci obsažené např. v [] (poznamenejme, že se zde užívá alternativní označení $\mathcal{L}\{f\}(p) = \mathcal{L}^f(p)$).

Příklad 13.1:
Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - y' - 6y = 0$$

s podmínkami $y(0) = 5$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.

řešení:
Laplaceovu transformaci řešení y označíme $\mathcal{L}_y(p) = Y(p)$. Pak

$$\mathcal{L}_{y'}(p) = pY(p) - y(0^+) = pY(p) - 5 \quad \text{a}$$

$$\mathcal{L}_{y''}(p) = p\mathcal{L}_{y'}(p) - y'(0^+) = p(pY(p) - 5) - 0 = p^2Y(p) - 5p \ .$$

Vzhledem k linearitě Laplaceovy transformace platí

$$0 = \mathcal{L}_{y''-y'-6y}(p) = p^2Y(p) - 5p - pY(p) + 5 - 6Y(p) \ .$$

Odtud vypočítáme

$$Y(p)(p^2 - p - 6) = 5p - 5 \qquad \text{a} \qquad Y(p) = \frac{5p-5}{p^2-p-6} \ .$$

Poslední výraz rozložíme na parciální zlomky

$$\frac{5p-5}{p^2-p-6} = \frac{5p-5}{(p-3)(p+2)} = \frac{A}{p-3} + \frac{B}{p+2} \ .$$

Z rovnosti $5p - 5 = A(p + 2) + B(p - 3)$ dostaneme $A = 2$ a $B = 3$. Na rovnost

$$Y(p) = \frac{2}{p-3} + \frac{3}{p+2}$$

užijeme inverzní Laplaceovu transformaci

$$\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p}}(x) = 1 \ , \qquad \mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p-3}}(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x} \ , \qquad \mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p+2}}(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}$$

a dostaneme řešení

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}_Y(x) = 2\mathrm{e}^{3x} + 3\mathrm{e}^{-2x} \ .$$

Příklad 13.2:
Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - y' - 2y = 3\mathrm{e}^{2x}$$

s podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace.

řešení:
Laplaceovu transformaci řešení y označíme $\mathcal{L}_y(p) = Y(p)$. Pak

$$\mathcal{L}_{y'}(p) = pY(p) \quad \text{a}$$

$$\mathcal{L}_{y''}(p) = p\mathcal{L}_{y'}(p) - y'(0^+) = p^2Y(p) - 1 \ .$$

Laplaceova transformace pravé strany dává

$$\mathcal{L}_{3e^{2x}}(p) = \frac{3}{p-2} \ .$$

Vzhledem k linearitě Laplaceovy transformace platí

$$\mathcal{L}_{y''-y'-2y}(p) = p^2Y(p) - 1 - pY(p) - 2Y(p) = \frac{3}{p-2} \ .$$

Odtud vypočítáme

$$Y(p)(p^2-p-2) = \frac{3}{p-2} + 1 = \frac{p+1}{p-2} \qquad \text{a} \qquad Y(p) = \frac{1}{(p-2)^2} \ .$$

Na poslední rovnost užijeme inverzní Laplaceovu transformaci

$$\mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p^2}}(x) = x \ , \qquad \mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{(p-2)^2}}(x) = xe^{2x}$$

a dostaneme řešení

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}_Y(x) = xe^{2x} \ .$$

Příklad 13.3:
Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 3y = e^x \cos x$$

s podmínkami $y'(0) = y(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace.

řešení:
Laplaceovu transformaci řešení y označíme $\mathcal{L}_y(p) = Y(p)$. Pak

$$\mathcal{L}_{y'}(p) = pY(p) - y(0^+) = pY(p) - 1 \quad \text{a}$$

$$\mathcal{L}_{y''}(p) = p\mathcal{L}_{y'}(p) - y'(0^+) = p(pY(p)-1) - 1 = p^2Y(p) - p - 1 \ .$$

Laplaceova transformace pravé strany dává

$$\mathcal{L}_{e^x \cos x}(p) = \frac{p-1}{1+(p-1)^2} \ .$$

Vzhledem k linearitě Laplaceovy transformace platí

$$\mathcal{L}_{y''-2y'+3y}(p) = (p^2Y(p) - p - 1) - 2(pY(p) - 1) + 3Y(p) = \frac{p-1}{p^2-2p+2} \ .$$

Odtud vypočítáme

$$Y(p)(p^2-2p+3) = \frac{p-1}{p^2-2p+2} - 1 + p = \frac{p^3-3p^2+5p-3}{p^2-2p+2} \qquad \text{a}$$

$$Y(p) = \frac{p^3-3p^2+5p-3}{(p^2-2p+2)(p^2-2p+3)} = \frac{p-1}{p^2-2p+2} \ .$$

Na rovnost

$$Y(p) = \frac{p-1}{1+(p-1)^2}$$

užijeme inverzní Laplaceovu transformaci a dostaneme řešení

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}_Y(x) = \mathcal{L}^{-1}_{\frac{p-1}{1+(p-1)^2}}(x) = e^x \cos x \ .$$

Příklad 13.4:
Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' = 4x - 2$$

s podmínkami $y(0) = 8$ a $y'(0) = 6$ pomocí Laplaceovy transformace.

řešení:
Laplaceovu transformaci řešení y označíme $\mathcal{L}_y(p) = Y(p)$. Pak

$$\mathcal{L}_{y'}(p) = pY(p) - y(0^+) = pY(p) - 8 \quad \text{a}$$

$$\mathcal{L}_{y''}(p) = p\mathcal{L}_{y'}(p) - y'(0^+) = p(pY(p) - 8) - 6 = p^2Y(p) - 8p - 6 \ .$$

Laplaceova transformace pravé strany dává

$$\mathcal{L}_{4x-2}(p) = \frac{4}{p^2} - \frac{2}{p} \ .$$

Vzhledem k linearitě Laplaceovy transformace platí

$$\mathcal{L}_{y''-2y'}(p) = (p^2Y(p) - 8p - 6) - 2(pY(p) - 8) = \frac{4}{p^2} - \frac{2}{p} \ .$$

Odtud vypočítáme

$$Y(p)p(p-2) = 8p - 10 + \frac{4}{p^2} - \frac{2}{p} = \frac{8p^3 - 10p^2 - 2p + 4}{p^2}$$

a rozkladem na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{8p^3 - 10p^2 - 2p + 4}{p^3(p-2)} = \frac{5}{p} - \frac{2}{p^3} + \frac{3}{p-2} \ .$$

Na rovnost

$$Y(p) = \frac{5}{p} - \frac{2}{p^3} + \frac{3}{p-2}$$

užijeme inverzní Laplaceovu transformaci a dostaneme řešení

$$y(x) = \mathcal{L}_Y^{-1}(x) = 5 - x^2 + 3\mathrm{e}^{2x} \ .$$

Příklad 13.5:
Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + y = 2\sin x$$

s podmínkami $y(0) = 2$ a $y'(0) = 1$ pomocí Laplaceovy transformace.

řešení:
Laplaceovu transformaci řešení y označíme $\mathcal{L}_y(p) = Y(p)$. Pak

$$\mathcal{L}_{y'}(p) = pY(p) - y(0^+) = pY(p) - 2 \quad \text{a}$$

$$\mathcal{L}_{y''}(p) = p\mathcal{L}_{y'}(p) - y'(0^+) = p(pY(p) - 2) - 1 = p^2Y(p) - 2p - 1 \ .$$

Laplaceova transformace pravé strany dává

$$\mathcal{L}_{2\sin x}(p) = \frac{2}{1+p^2} \ .$$

Vzhledem k linearitě Laplaceovy transformace platí

$$\mathcal{L}_{y''-2y'+y}(p) = (p^2Y(p) - 2p - 1) - 2(pY(p) - 2) + Y(p) = \frac{2}{1+p^2} \ .$$

Odtud vypočítáme

$$Y(p)(p^2 - 2p + 1) = \frac{2}{1+p^2} + 2p - 3 = \frac{2p^3 - 3p^2 + 2p - 1}{p^2 + 1} \qquad \text{a}$$

$$Y(p) = \frac{2p^3 - 3p^2 + 2p - 1}{(p^2+1)(p-1)^2} = \frac{2p^2 - p + 1}{(p^2+1)(p-1)} = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p-1} \ .$$

Na rovnost

$$Y(p) = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p-1}$$

užijeme inverzní Laplaceovu transformaci a dostaneme řešení

$$y(x) = \mathcal{L}_Y^{-1}(x) = \cos x + \mathrm{e}^x \ .$$

Příklad 13.6:
Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + 4y = 2 + 4x^2$$

s podmínkami $y(0) = 1$ a $y'(0) = -2$ pomocí Laplaceovy transformace.

řešení:
Laplaceovu transformaci řešení y označíme $\mathcal{L}_y(p) = Y(p)$. Pak

$$\mathcal{L}_{y'}(p) = pY(p) - y(0^+) = pY(p) - 1 \quad \text{a}$$

$$\mathcal{L}_{y''}(p) = p\mathcal{L}_{y'}(p) - y'(0^+) = p(pY(p) - 1) + 2 = p^2Y(p) - p + 2 \ .$$

Laplaceova transformace pravé strany dává

$$\mathcal{L}_{2+4x^2}(p) = \frac{2}{p} + 4\frac{2}{p^3} \ .$$

Vzhledem k linearitě Laplaceovy transformace platí

$$\mathcal{L}_{y''+4y}(p) = (p^2Y(p) - p + 2) + 4Y(p) = \frac{2}{p} + \frac{8}{p^3} \ .$$

Odtud vypočítáme

$$Y(p)(p^2+4) = p - 2 + \frac{2}{p^3}(p^2+4) \qquad \text{a upravíme}$$

$$Y(p) = \frac{p}{p^2+4} - \frac{2}{p^2+4} + \frac{2}{p^3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{p}{2}}{(\frac{p}{2})^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\frac{p}{2})^2+1} + \frac{2}{p^3} \ .$$

Vzhledem ke vztahům

$$\mathcal{L}_{x^2}(p) = \frac{2}{p^3} \ , \quad \mathcal{L}_{\cos x}(p) = \frac{p}{p^2+1} \ , \quad \mathcal{L}_{\cos 2x}(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{p}{2}}{(\frac{p}{2})^2+1} = \frac{p}{p^2+4} \ , \quad \mathcal{L}_{\sin 2x}(p) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\frac{p}{2})^2+1} = \frac{1}{p^2+4}$$

platí

$$\mathcal{L}^{-1}_{\frac{2}{p^3}}(x) = x^2, \qquad \mathcal{L}^{-1}_{\frac{p}{p^2+4}}(x) = \cos 2x, \qquad \mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p^2+4}}(x) = \sin 2x$$

a při užití inverzní Laplaceovy transfprmace dostaneme řešení

$$y(x) = \mathcal{L}_Y^{-1}(x) = \cos 2x - \sin 2x + x^2 \ .$$

Příklad 13.7:
Vyřešte diferenciální rovnici

$$y'' + y = x^2$$

s podmínkami $y(0) = -2$ a $y'(0) = 0$ pomocí Laplaceovy transformace.

řešení:
Laplaceovu transformaci řešení y označíme $\mathcal{L}_y(p) = Y(p)$. Pak

$$\mathcal{L}_{y'}(p) = pY(p) - y(0^+) = pY(p) + 2 \quad \text{a}$$

$$\mathcal{L}_{y''}(p) = p\mathcal{L}_{y'}(p) - y'(0^+) = p(pY(p) + 2) = p^2Y(p) + 2p \ .$$

Laplaceova transformace pravé strany dává

$$\mathcal{L}_{x^2}(p) = \frac{2}{p^3} \ .$$

Vzhledem k linearitě Laplaceovy transformace platí

$$\mathcal{L}_{y''+y}(p) = p^2 Y(p) + 2p + Y(p) = \frac{2}{p^3} \ .$$

Odtud vypočítáme

$$Y(p)(p^2+1) = \frac{2-2p^4}{p^3} = \frac{2(1+p^2)(1-p^2)}{p^3} \qquad \text{a}$$

$$Y(p) = \frac{2}{p^3} - \frac{2}{p} \ .$$

Na poslední rovnost užijeme inverzní Laplaceovu transformaci.

$$\mathcal{L}^{-1}_{\frac{2}{p^3}}(x) = x^2 \qquad \mathcal{L}^{-1}_{\frac{1}{p}}(x) = 1$$

a dostaneme řešení

$$y(x) = \mathcal{L}^{-1}_{Y}(x) = x^2 - 2 \ .$$

Literatura

[1] Bruno Budinský, Jura Charvát: Matematika II, stavební fakulta ČVUT Praha 1999

[2] Serge Lang: Calculus of several variables, Springer N.York 1987

[3] Petr Němec, Václav Slavík: Matematika III. pro TF, ČZU Praha 1999

[4] Václav Slavík, Marie Wohlmuthová: Matematika I, ČZU Praha 2004 (nebo starší verze z roku 2001, případně verze autorů Václav Slavík a Jaroslava Hrubá z roku 1997)

[5] Václav Slavík, Marie Wohlmuthová: Matematika II, ČZU Praha 2003 (nebo starší verze z roku 2001, případně verze autorů Václav Slavík a Jaroslava Hrubá z roku 1997)

[6] Jaroslav Tišer, Jan Hamhalter: Diferenciální počet funkcí více proměnných, elektrotechnická fakulta ČVUT Praha 2006

[7] Jaroslav Tišer, Jan Hamhalter: Integrální počet funkcí více proměnných, elektrotechnická fakulta ČVUT Praha 2006

[8] Ondřej Zindulka: Vektorové pole, stavební fakulta ČVUT Praha 1999