Neurčitý integrál

Robert Mařík

4. března 2012

V tomto souboru jsou vysvětleny a na příkladech s postupným řešením demonstrovány základní integrační metody. Ikonka ♣ za integrálem načte integrál do online aplikace na adrese http://www.mendelu.cz/user/marik/maw, která umožní výpočet integrálu, včetně automatických návrhů, jakou metodu zvolit.

©Robert Mařík, 2012

Obsah

©Robert Mařík, 2012

©Robert Mařík, 2012

©Robert Mařík, 2012

1 Definice neurčitého integrálu

Definice (neurčitý integrál, primitivní funkce)**.** Buď I otevřený interval, f a F funkce definované na I. Jestliže platí

$$F'(x) = f(x) \text{ pro všechna } x \in I, \tag{1}$$

nazývá se funkce F *primitivní funkcí k funkci* f, nebo též *neurčitý integrál funkce* f na intervalu I. Zapisujeme

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x).$$

Existuje-li k funkci f neurčitý integrál na intervalu I, nazývá se funkce f *integrovatelná na I.*

Primitivní funkce $F(x)$ je vždy spojitá na I, plyne to z existence derivace.

Věta 1 (postačující podmínka existence neurčitého integrálu)**.** Ke každé spojité funkci existuje neurčitý integrál.

©Robert Mařík, 2012

Věta 2 (jednoznačnost primitivní funkce). Primitivní funkce je na daném intervalu k dané funkci určena jednoznačně, až na libovolnou aditivní konstantu. Přesněji, platí následující:

- Je-li F primitivní funkcí k funkci f na intervalu I, platí totéž i pro funkci $G(x) = F(x) + c$, kde $c \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta nezávislá na x.
- Jsou-li F a G primitivní funkce k téže funkci f na intervalu I, liší se obě funkce na intervalu I nejvýše o aditivní konstantu, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že

$$F(x) = G(x) + c \qquad \text{pro všechna } x \in I.$$

Bohužel, ne vždy neurčitý integrál dokážeme efektivně najít. Zatímco problém nalezení derivace funkce složené z funkcí, které umíme derivovat, spočívá pouze ve správné aplikaci vzorců pro derivování, problém nalézt neurčitý integrál i k funkci tak jednoduché, jako je například e^{-x^2} je neřešitelný ve třídě elementárních funkcí.

©Robert Mařík, 2012

2 Základní vzorce

Věta 3. Nechť f, g jsou funkce integrovatelné na I, c nechť je reálné číslo. Pak na intervalu I platí

$$\int f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 4. Nechť f je funkce integrovatelná na I.

Pak $\boxed{\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)}$, kde F je funkce primitivní k funkci f na intervalu I. Platí pro ta x, pro která je $ax+b \in I$.

Věta 5. Nechť funkce f má derivaci a nemá nulový bod na intervalu I. Potom na tomto intervalu platí $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|}$.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \left(2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x$.

$$I = \int \left(2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) \mathrm{d}x$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,dx$.

$$I = \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,dx$$
$$= 2\int x\,dx + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,dx + 6\int x^{-3}\,dx - \int \sin x\,dx + \int e^x\,dx$$

- Integrál ze součtu je součet integrálů.
- Integrál násobku funkce je násobek integrálu.
- Některé funkce je možno přepsat na mocninné funkce.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \left(2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) dx$.

♣

$$I = \int \left(2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x\right) dx$$
$$= 2\int x\, dx + 3\int x^{\frac{1}{4}}\, dx + 6\int x^{-3}\, dx - \int \sin x\, dx + \int e^x\, dx$$
$$= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + C$$

- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
- $\int \sin x\, dx = -\cos x$
- $\int e^x\, dx = e^x$

©Robert Mařík, 2012

♣

Najděte $\int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,dx$.

$$I = \int (2x + 3\sqrt[4]{x} + \frac{6}{x^3} - \sin x + e^x)\,dx$$

$$= 2\int x\,dx + 3\int x^{\frac{1}{4}}\,dx + 6\int x^{-3}\,dx - \int \sin x\,dx + \int e^x\,dx$$

$$= 2\frac{x^2}{2} + 3\frac{x^{5/4}}{5/4} + 6\frac{x^{-2}}{-2} - (-\cos x) + e^x + C$$

$$= x^2 + \frac{12}{5}x^{5/4} - 3\frac{1}{x^2} + \cos x + e^x + C$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

♣

$$I = \int \operatorname{tg} x \, dx$$

©Robert Mařík, 2012

♣

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

$$I = \int \operatorname{tg} x \, dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

Použijeme definici funkce tangens.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

♣

$$I = \int \operatorname{tg} x \, dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx$$

- Platí $(\cos x)' = -\sin x$. Čitatel se tedy liší od derivace jmenovatele jenom konstantím násobkem.
- Vynásobíme a vydělíme integrál tímto násobkem.

©Robert Mařík, 2012

♣

Najděte $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

$$I = \int \operatorname{tg} x \, dx$$
$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$
$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx$$
$$= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx$$

Formálně použijeme vztah $(\cos x)' = -\sin x$, abychom viděli vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln|f(x)| + C$.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$.

♣

$$
\begin{aligned}
I &= \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x \\
&= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \,\mathrm{d}x \\
&= -\ln|\cos x| + C
\end{aligned}
$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

©Robert Mařík, 2012 ×

Najděte $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$$

- Platí $(x^2+4x+5)' = 2x+4$. Čitatel se tedy liší od derivace jmenovatele jenom konstantím násobkem.
- Vynásobíme a vydělíme integrál tímto násobkem.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx$.

$$I = \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,dx$$

Přepíšeme do tvaru $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$.

©Robert Mařík, 2012

♣

Najděte $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x+2}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+C \end{aligned}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4}\,\mathrm{d}x$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4}\,dx$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4}\,dx$$
$$= \int \frac{x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}\,dx$$

- Derivace jmenovatele je x, v čitateli však není násobek této funkce.
- Vzorec $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ nelze přímo použít.
- Rozdělíme zlomek na dva.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4}\,dx$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}\,dx$$

- V prvním zlomku je v čitateli polovina derivace jmenovatele.
- Proto první zlomek vynásobíme a vydělíme dvěma.

©Robert Mařík, 2012

♣

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2+4}\,dx$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2+4}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+4} + \frac{5}{x^2+4}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + 5\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$$

- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$
- $\int \frac{1}{A^2+x^2}\,dx = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A}$

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3}\,dx$.

$$I = \int \frac{1}{(x+6)^3}\,dx$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (x+6)^{-3}\,\mathrm{d}x$$

Jedná se o mocninnou funkci.

©Robert Mařík, 2012

♣

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (x+6)^{-3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(x+6)^{-2}}{-2}$$

- $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, kde F je integrál z f.
- V našem případě je $f(x) = x^{-3}$, $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2}$ a $a = 1$.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$I = \int \frac{1}{(x+6)^3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int (x+6)^{-3}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{(x+6)^{-2}}{-2}$$
$$= -\frac{1}{2(x+6)^2} + C$$

Upravíme.

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|$
- $\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a = 2$.

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,dx = \int (2 - 1\cdot x)^{-5}\,dx$$

$$\int e^{-x}\,dx =$$

$$\int e^{3x}\,dx =$$

Přepíšeme na mocninnou funkci.

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x = \int (2-1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(2-x)^{-4}}{-4}\cdot\frac{1}{-1}$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

- $\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
- $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a=-1$.

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x = \int (2-1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(2-x)^{-4}}{-4}\cdot\frac{1}{-1}$$

$$= \frac{1}{4(2-x)^4} + C$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x =$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

$$\int \frac{1}{(2-x)^5}\,\mathrm{d}x = \int (2 - 1\cdot x)^{-5}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{(2-x)^{-4}}{-4}\cdot\frac{1}{-1}$$

$$= \frac{1}{4(2-x)^4} + C$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + C$$

- $\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$
- $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a = -1$.

Najděte následující integrály.

$$\int \frac{1}{2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln|2x+5| + C$$

- $\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x$
- $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a = 3$.

$$4(2-x)^4$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x} + C$$

$$\int e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \, \mathrm{d}x$$

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$$

$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} \, \mathrm{d}x$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \, dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, dx$$

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} \, dx$$

Upravíme podle vzorce $(a+b)^2$:

$$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} + 2 + e^{-2x}$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \, dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx$$

Integrujeme podle vzorců

$$\boxed{\int e^x \, dx = e^x},$$

$$\boxed{\int 1 \, dx = x},$$

$$\boxed{\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b)}, \text{ kde } \int f(x) \, dx = F(x).$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \, dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, dx$$

$$\int \sin^2 x \, dx$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} \, dx$$

Použijeme vzorec

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \, dx = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \, dx$$
$$= \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x \, dx$$

$$\int \frac{x^2}{\ldots} \, dx$$

Integrujeme podle vzorců

$$\boxed{\int \sin x \, dx = -\cos x}$$

a

$$\boxed{\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b)}, \text{ kde } \int f(x) \, dx = F(x).$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \,\mathrm{d}x = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \bigl(1 - \cos(2x)\bigr)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

Vzorec

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \,\mathrm{d}x = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(2x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \Big(1 - \cos(2x)\Big) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\Big] + C$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} \,\mathrm{d}x$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x$$

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \,\mathrm{d}x = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(2x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \Big(1 - \cos(2x)\Big) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right] + C$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} \,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} \,\mathrm{d}x$$

Potřebujeme vydělit. K tomu je možno převést čitatel na tvar, který později umožní zkrátit.

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2\,\mathrm{d}x = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \Big(1 - \cos(2x)\Big)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin(2x)\right] + C$$

$$\int \frac{x^2}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} = \frac{x^2 - 1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte následující integrály.

$$\int (e^x + e^{-x})^2 \,\mathrm{d}x = \int (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \sin(2x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\cos 2x) + C$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \Big(1 - \cos(2x)\Big) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin(2x)\right] + C$$

$$\int \frac{x^2}{x+1} \,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2 - 1 + 1}{x+1} \,\mathrm{d}x = \int x - 1 + \frac{1}{x+1} \,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C$$

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x|, \quad \int f(ax+b) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} f(ax+b)$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{(2x-4)}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

“Zašifrujeme” derivaci jmenovatele, tj. výraz $(2x-4)$, do čitatele.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

- Musíme upravit zlomek tak, aby se zlomky v prvním a druhém integrálu rovnaly.
- K těmto úpravám použijeme jenom multiplikativní a aditivní konstanty (nenadělají "moc velkou neplechu" při integraci).
- Přidáním násobku $\dfrac{1}{2}$ máme ve druhém zlomku v čitateli výraz $\dfrac{1}{2}(2x-4) = x-2$. Koeficient u x je v pořádku.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$. ♣

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

- $\frac{1}{2}(2x-4) = x-2$
- $\frac{1}{2}(2x-4)+2 = x$
- Nyní je v čitateli jenom x. Chybí číslo 5.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

- $\dfrac{1}{2}(2x-4) = x-2$
- $\dfrac{1}{2}(2x-4)+2 = x$
- $\dfrac{1}{2}(2x-4)+2+5 = x+5$
- První a druhý zlomek jsou stejné, nedopustili jsme se žádné úpravy, která by změnila hodnotu zlomku.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$

Rozdělíme zlomek na dva.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$. ♣

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+9\right| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$$

©Robert Mařík, 2012

♣

Najděte $\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,dx$.

$$I = \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,dx$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+9\right| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,dx$$

Doplníme na čtverec ve jmenovateli druhého zlomku.

$$x^2-4x+9 = x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2-4+9 = (x-2)^2+5$$

©Robert Mařík, 2012

♣

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,dx$.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,dx \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,dx \\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1}
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \frac{1}{A^2+x^2}\,dx = \frac{1}{A}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{A}$, kde v našem případě $A=\sqrt{5}$

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+9| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1}
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$, v našem případě $a=1$

©Robert Mařík, 2012

♣

Najděte $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x$.

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2x-4}{x^2-4x+9} + \frac{2+5}{x^2-4x+9}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+9\right| + \int \frac{7}{(x-2)^2+5}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+9\right| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x^2-4x+9\right| + 7\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{\sqrt{5}} + C
\end{aligned}
$$

Upravíme.

©Robert Mařík, 2012

3 Integrace per-partés

Věta 6. Nechť funkce u a v mají derivace na intervalu I. Pak platí

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,} \tag{2}$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

©Robert Mařík, 2012

Věta 6. Nechť funkce u a v mají derivace na intervalu I. Pak platí

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,} \tag{3}$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Důkaz:

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \text{derivace součinu}$$

$$\int (uv)'\,\mathrm{d}x = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x \qquad \text{zintegrování a linearita integrálu}$$

$$uv = \int u'v\,\mathrm{d}x + \int uv'\,\mathrm{d}x \qquad \text{integrál odstraní derivaci}$$

$$uv - \int u'v\,\mathrm{d}x = \int uv'\,\mathrm{d}x \qquad \text{algebraická úprava}$$

Integrály typické pro výpočet metodou per-partés. $P(x)$ je polynom.

$$\int P(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x, \int P(x)\sin(\alpha x)\,\mathrm{d}x, \int P(x)\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int P(x)\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x, \int P(x)\ln^m x\,\mathrm{d}x.$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x+1)\cdot \ln x \, \mathrm{d}x$

♣

Funkce je součinem polynomu a logaritmické funkce $\rightarrow$ per-partés.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x+1)\cdot \ln x \, dx$

♣

$$\int (x+1)\ln x \, dx = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \\ & \\ v' = x+1 & v = \end{array}}$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při $u = \ln x$ a $v' = x+1$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x+1) \cdot \ln x \, dx$

$$\int (x+1) \ln x \, dx = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = x+1 & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{array}}$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při $u = \ln x$ a $v' = x + 1$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x+1)\cdot \ln x \, \mathrm{d}x$

♣

$$\int (x+1)\ln x \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = x+1 & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{array}}$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \mathrm{d}x$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x$$

při $u = \ln x$ a $v' = x + 1$.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int (x+1)\cdot \ln x \, \mathrm{d}x$

$$\int (x+1)\ln x \, \mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = x+1 & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{array}}$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \mathrm{d}x$$

Roznásobíme závorku.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x+1)\cdot \ln x \, dx$

$$\int (x+1)\ln x \, dx = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = x+1 & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{array}}$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right) dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + x\right)$$

Dokončíme integraci.

©Robert Mařík, 2012

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x+1)\cdot \ln x \, \mathrm{d}x}$$

♣

$$\int (x+1)\ln x\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = x+1 & v = \dfrac{x^2}{2} + x \end{array}}$$

$$= \ln x \left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \int \frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \int \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + x\right)$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\ln x - \frac{1}{4}x^2 - x + C$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

©Robert Mařík, 2012

$$\text{Vypočtěte } \int x \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$\int x \cdot \sin x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = \\ & \\ v' = \sin x & v = \end{array}}$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x$$

při $u = x$ a $v' = \sin x$.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} \hline u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \\ \hline \end{array}$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při $u = x$ a $v' = \sin x$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} \hline u = x & u' = 1 \\ & \\ v' = \sin x & v = -\cos x \\ \hline \end{array}$$

$$= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

při $u = x$ a $v' = \sin x$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -x \cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

Upravíme.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x \sin x \, dx$

$$\int x \cdot \sin x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -x\cos x - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx$$

$$= -x\cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

- Integruje druhou část: $\int \cos x \, dx = \sin x$
- Hotovo.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x-2)\cdot \sin(2x)\,\mathrm{d}x$

Funkce je součinem polynomu a sinu $\longrightarrow$ per-partés.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x-2)\cdot \sin(2x)\,\mathrm{d}x$

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = x-2 & u' = \\ & \\ v' = \sin(2x) & v = \end{array}}$$

Integrujeme per-partés pomocí vzorce

$$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$$

při $u = x-2$ a $v' = \sin(2x)$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x-2)\cdot \sin(2x)\,\mathrm{d}x$

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = x-2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}}$$

Platí

$$v = \int v'(x)\,\mathrm{d}x = \int \sin(2x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\cos(2x),$$

protože

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x \qquad \text{a} \qquad \int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b).$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x-2)\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

♣

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \begin{array}{|ll|} \hline u = x-2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v \quad -\frac{1}{2}\cos 2x \\ \hline \end{array}$$

$$= (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x-2)\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = x-2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}}$$

$$= (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$$

Vytkneme konstantu $\left(-\frac{1}{2}\right)$ z integrálu.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x-2)\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$ ♣

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = x-2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}}$$

$$= (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

Platí $\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin(2x)$, protože

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x \qquad \text{a} \qquad \int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b).$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x-2)\cdot\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

$$\int (x-2)\sin(2x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{ll} u = x-2 & u' = 1 \\ v' = \sin(2x) & v = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{array}}$$

$$= (x-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) - \int 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

$$= -\frac{1}{2}(x-2)\cos(2x) + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$$

Upravíme.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x^2 + 1)\sin x \, dx$

♣

©Robert Mařík, 2012 ×

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x}$$

♣

$$\int (x^2+1)\cdot \sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = \\ & \\ v' = \sin x & v = \end{array}}$$

- Funkce je součinem polynomu a funkce sinus.
- Budeme integrovat per-partés podle vzorce

$$\int u\cdot v' \,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v \,\mathrm{d}x$$

při volbě $u = (x^2+1)$ a $v' = \sin x$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x$$

$u = x^2+1$	$u' = 2x$
$v' = \sin x$	$v = -\cos x$

$$(x^2+1)' = 2x$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\cdot \sin x\,\mathrm{d}x$$

$u = x^2+1$	$u' = 2x$
$v' = \sin x$	$v = -\cos x$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$$

Konstantní násobek 2 a znaménko minus dáme před integrál.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\cdot\sin x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cdot\cos x \,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = \\ v' = \cos x & v = \end{array}}$$

Ještě jednou integrujeme per-partés. Nyní $u = x$ a $v' = \cos x$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \, dx$

$$\int (x^2+1)\cdot \sin x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x \cdot \cos x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}}$$

$$x' = 1$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x$$

©Robert Mařík, 2012

$\clubsuit$

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x \, dx$

$$\int (x^2+1)\cdot \sin x \, dx$$

$u = x^2+1$	$u' = 2x$
$v' = \sin x$	$v = -\cos x$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x \cdot \cos x \, dx$$

$u = x$	$u' = 1$
$v' = \cos x$	$v = \sin x$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x \sin x - \int \sin x \, dx\right)$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x$

$$\int (x^2+1)\cdot\sin x\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - (-\cos x)\right)$$

Integrujeme sinus: $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x^2+1)\sin x\,dx$

$$\int (x^2+1)\cdot\sin x\,dx$$

$u = x^2+1$	$u' = 2x$
$v' = \sin x$	$v = -\cos x$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\int x\cdot\cos x\,dx$$

$u = x$	$u' = 1$
$v' = \cos x$	$v = \sin x$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - \int \sin x\,dx\right)$$

$$= -(x^2+1)\cos x + 2\left(x\sin x - (-\cos x)\right)$$

$$= (1-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$$

Upravíme.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x^2 + 1)e^{-x} \, dx$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x^2 + 1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2 + 1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Integruje součin polynomu a exponenciální funkce.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

- Integrujeme per-partés.
- Polynom budeme derivovat a exponencielu integrovat.
- Nezapomeňme, že $\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$u = x^2+1$	$u' = 2x$
$v' = e^{-x}$	$v = -e^{-x}$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Vzorec je

$$\int u\cdot v'\,\mathrm{d}x = u\cdot v - \int u'\cdot v\,\mathrm{d}x$$

.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

- Opět polynom krát exponenciální funkce.
- Opět integrujeme per-partés. Opět derivujeme polynom.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,dx$.

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,dx$$

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right)$$

Vzorec pro červenou část je $\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx$, zbytek zůstane.

©Robert Mařík, 2012

♣

$\boxed{\text{Vypočtěte } \int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x.}$

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x})$$

$$\int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-x}$$

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int (x^2+1)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^2+1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x^2+1 & u' = 2x \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\int x e^{-x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x\right)$$

$$= -(x^2+1)e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) = -e^{-x}(x^2+2x+3) + C,$$

Vytkneme $(-e^{-x})$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx$$

Jedná se o součin polynomu a funkce arkustangens.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ & \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

Budeme integrovat metodou per-partés. Budeme integrovat polynom a derivovat arkustangens.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} \hline u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \\ \hline \end{array} \quad = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} u = \operatorname{arctg} x & u' = \frac{1}{1+x^2} \\ v' = x & v = \frac{x^2}{2} \end{array} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, dx$$

Musíme integrovat racionální funkci. Nejprve provedeme dělení:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x$.

$$\int x \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ & \\ v' = x & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array}} = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \left(x - \operatorname{arctg} x \right) + C.$$

K dokončení zbývá integrovat jedničku a jeden zlomek. To provedeme pomocí příslušných vzorců.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

♣

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \\ & \\ v' = 1 & v = \end{array}}$$

Ve funkci je “zašifrovaný” součin polynomu a logaritmické funkce:

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx .$$

Integrujeme per-partés při volbě $u = \ln x$ a $v' = 1$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \begin{array}{|ll|} u = \ln x & u' = \frac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \quad = x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

Užijeme vztah $\frac{1}{x} x = 1$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln x \,dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \,dx \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln x - \int 1 \,dx$$

$$= x \ln x - x$$

$$\int 1 \,dx = x$$

©Robert Mařík, 2012

$\clubsuit$

Vypočtěte $\int \ln x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = 1 & v = x \end{array}} \quad = x \ln x - \int 1 \, dx$$

$$= x \ln x - x$$

$$= x(\ln x - 1) + C$$

Hotovo.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, \mathrm{d}x$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, \mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \\ & \\ v' = 1 & v = \end{array}}$$

- Je zde "zašifrován" součin polynomu a druhé mocniny logaritmu.
- Upravíme funkci $\ln^2 x$ na součin $(1) \cdot (\ln^2 x)$ a integrujeme per-partés při volbě $u = \ln^2 x$ a $v' = 1$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx$$

$u = \ln^2 x$	$u' = \dfrac{2 \ln x}{x}$
$v' = 1$	$v = x$

$$(\ln^2 x)' = 2 \ln x (\ln x)' = 2 \ln x \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln^2 x \,\mathrm{d}x$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} \quad = x\ln^2 x - 2\int \ln x \,\mathrm{d}x$$

$$\int u \cdot v' \,\mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \,\mathrm{d}x$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

♣

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2 \ln x}{x} \\ & \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \\ & \\ v' = 1 & v = \end{array}}$$

Tento trik již známe: Napíšeme funkci $\ln x$ jako součin $(1) \cdot \ln x$ a integrujeme per-partés při volbě $u = \ln x$ a $v' = 1$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int 1 \, dx = x$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2 \ln x}{x} \\ & \\ v' = 1 & v = x \end{array}} \quad = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ & \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \ln^2 x - 2 \left(x \ln x - \int 1 \, dx \right)$$

$$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2 \ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - \int 1 \, dx\right)$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - x\right)$$

Dopočítáme integrál z jedničky.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \ln^2 x \, dx$

$$\int 1 \cdot \ln^2 x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \ln^2 x & u' = \dfrac{2\ln x}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}} = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} u = \ln x & u' = \dfrac{1}{x} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - \int 1 \, dx\right)$$

$$= x \ln^2 x - 2\left(x \ln x - x\right)$$

$$= x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x + C$$

Upravíme. Hotovo.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

$$\int x^3 \sin x \, dx = \boxed{\begin{array}{lllll} u = x^3 & \xrightarrow{\text{derivace}} 3x^2 & \xrightarrow{\text{derivace}} 6x & \xrightarrow{\text{derivace}} 6 & \xrightarrow{\text{derivace}} 0 \\ v' = \sin x & \xrightarrow{\text{integrace}} -\cos x & \xrightarrow{\text{integrace}} -\sin x & \xrightarrow{\text{integrace}} \cos x & \xrightarrow{\text{integrace}} \sin x \end{array}}$$

- Třikrát integrujeme per-partés, ale všechno zapíšeme do jednoho schematu.
- Žlutá šipka reprezentuje derivování. Derivujeme až na nulu.
- Červená šipka reprezentuje integrování.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

♣

$$\int x^3 \sin x \, dx = \begin{array}{|ccccc|} u = x^3 & 3x^2 & 6x & 6 & 0 \\ & \text{součin} & \text{součin} & \text{součin} & \text{součin} \\ v' = \sin x & -\cos x & -\sin x & \cos x & \sin x \end{array}$$

$$= -x^3 \cos x - (-3x^2 \sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x$$

Násobíme ve směru šipek. Součinům ve směru žlutých šipek znaménko ponecháme, součinům ve směru červených šipek znaménko změníme a všechny součiny sečteme.

©Robert Mařík, 2012

♣

Najděte $\int x^3 \sin x \, dx$.

$$\int x^3 \sin x \, dx = \boxed{\begin{array}{lllll} u = x^3 & 3x^2 & 6x & 6 & 0 \\ & & & & \\ v' = \sin x & -\cos x & -\sin x & \cos x & \sin x \end{array}}$$

$$= -x^3 \cos x - (-3x^2 \sin x) + 6x \cos x - 6 \sin x$$

$$= (-x^3 + 6x) \cos(x) + (3x^2 - 6) \sin x + C$$

Upravíme.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int (x^3 + 2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int (x^3 + 2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$\int (x^3 + 2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{l} u = x^3 + 2x \xrightarrow{\text{derivace}} 3x^2 + 2 \xrightarrow{\text{derivace}} 6x \xrightarrow{\text{derivace}} 6 \xrightarrow{\text{derivace}} 0 \\ \\ v' = e^{-x} \xrightarrow{\text{integrace}} -e^{-x} \xrightarrow{\text{integrace}} e^{-x} \xrightarrow{\text{integrace}} -e^{-x} \xrightarrow{\text{integrace}} e^{-x} \end{array}}$$

- Třikrát integrujeme per-partés, ale všechno zapíšeme do jednoho schematu.
- Žlutá šipka reprezentuje derivování. Derivujeme až na nulu.
- Červená šipka reprezentuje integrování.

©Robert Mařík, 2012

Najděte $\int (x^3 + 2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^3 + 2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{ccccccccc} u = x^3 + 2x & & 3x^2 + 2 & & 6x & & 6 & & 0 \\ & \searrow^{\text{součin}} & & \searrow^{\text{součin}} & & \searrow^{\text{součin}} & & \searrow^{\text{součin}} & \\ v' = e^{-x} & & -e^{-x} & & e^{-x} & & -e^{-x} & & e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^3 + 2x)e^{-x} - (3x^2 + 2)e^{-x} + (-6xe^{-x}) - 6e^{-x}$$

Násobíme ve směru šipek. Součinům ve směru žlutých šipek znaménko ponecháme, součinům ve směru červených šipek znaménko změníme a všechny součiny sečteme.

©Robert Mařík, 2012

♣

Najděte $\int (x^3 + 2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int (x^3 + 2x)e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \boxed{\begin{array}{ccccc} u = x^3 + 2x & 3x^2 + 2 & 6x & 6 & 0 \\ & & & & \\ v' = e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} & -e^{-x} & e^{-x} \end{array}}$$

$$= -(x^3 + 2x)e^{-x} - (3x^2 + 2)e^{-x} + (-6xe^{-x}) - 6e^{-x}$$

$$= -e^{-x}(x^3 + 2x + 3x^2 + 2 + 6x + 6)$$

$$= -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 8x + 8)$$

Upravíme.

©Robert Mařík, 2012

4 Integrace pomocí substituce.

Věta 7. Nechť $f(t)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť funkce $\varphi(x)$ má derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu J platí

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(t)\,dt, \tag{4}$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi(x)$.

Schematicky: $\boxed{\varphi(x) = t}$ $\boxed{\varphi'(x)\,dx = dt}$

Věta 8. Nechť $f(x)$ je funkce spojitá na intervalu I, nechť funkce $\varphi(t)$ má nenulovou derivaci na intervalu J a platí $\varphi(J) = I$. Potom na intervalu I platí

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt, \tag{5}$$

dosadíme-li napravo $t = \varphi^{-1}(x)$, kde $\varphi^{-1}(x)$ je funkce inverzní k funkci $\varphi(x)$.

Schematicky: $\boxed{x = \varphi(t)}$ $\boxed{dx = \varphi'(t)\,dt}$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

♣

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

♣

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

- Vnitřní složka je $\ln x$.
- Derivace funkce $\ln x$ je $\frac{1}{x}$.
- Tato derivace, $\frac{1}{x}$, je v součinu s integrovanou funkcí.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$$

$\ln x = t$

Zavedeme substituci $\ln x = t$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

♣

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x}\,dx &= dt \end{aligned}}$$

Nalezneme vztah mezi dx a dt.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}} \quad = \int \sin t\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme substituci.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \; \boxed{\begin{aligned} \ln x &= t \\ \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}} = \int \sin t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\cos t$$

Integrujeme.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

♣

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx = \int \sin(\ln x)\frac{1}{x}\,dx \;\boxed{\begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{array}}\; = \int \sin t\,dt$$

$$= -\cos t = -\cos(\ln x) + C$$

Použijeme substituci k návratu k proměnné x a přidáme integrační konstantu. Hotovo.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,dx$.

$$\int xe^{1-x^2}\,dx$$

Zkusíme substituovat za vnitřní složku složené funkce e^{1-x^2}.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2}\, dx$.

$$\int x e^{1-x^2}\, dx \quad \boxed{1 - x^2 = t}$$

Hledáme vztah mezi diferenciály.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Derivujeme obě strany substituce.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Vyjádříme odsud výraz $x\,\mathrm{d}x$, který figuruje uvnitř integrálu.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. ♣

$$\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}e^t$$

Vypočtěte integrál pomocí vzorce.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int x e^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}e^t$$

$$= -\frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

Použijeme substituci pro návrat k původní proměnné.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4+16}\,dx$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,dx \quad \boxed{x^2 = t}$$

- Substituce $x^4+16 = t$, nebo $x^4 = t$, nejsou úplně šikovné, protože vztah mezi diferenciály při této substituci je

$$4x^3\,dx = dt,$$

avšak člen $x^3\,dx$ nikde v integrálu není.

- Člen $x\,dx$ napovídá, použít substituci $x^2 = t$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$$

$$x^2 = t$$
$$2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$
$$x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

Hledáme vztah mezi diferenciály a vyjádříme z něj výraz $x\,\mathrm{d}x$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$ ♣

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\begin{aligned} x^2 &= t \\ 2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ x^4 &= t^2 \end{aligned}}$$

Substituce $x^2 = t$ vede k relaci $x^4 = (x^2)^2 = t^2$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4+16}\,dx$

♣

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,dx \quad \boxed{\begin{aligned} x^2 &= t \\ 2x\,dx &= dt \\ x\,dx &= \frac{1}{2}\,dt \\ x^4 &= t^2 \end{aligned}} \quad = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+16}\,dt$$

Dosadíme.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{x}{x^4+16}\,dx$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,dx \quad \boxed{\begin{aligned} x^2 &= t \\ 2x\,dx &= dt \\ x\,dx &= \frac{1}{2}\,dt \\ x^4 &= t^2 \end{aligned}} \quad = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+16}\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{t}{4}$$

Užijeme vzorec

$$\int \frac{1}{x^2+A^2}\,dx = \frac{1}{A}\operatorname{arctg}\frac{x}{A}$$

při $A = 4$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{x}{x^4+16}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} x^2 &= t \\ 2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \\ x^4 &= t^2 \end{aligned}} \quad = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+16}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{t}{4} = \frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{4} + C$$

Užijeme zpětnou substituci $t = x^2$. Hotovo.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

♣

©Robert Mařík, 2012 ×

♣

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

Vnitřní složka je $\sqrt{x+1}$. Derivace této vnitřní složky je

$$(\sqrt{x+1})' = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Výskyt této člene $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ uvnitř integrálu (a v součinu) napovídá, že provést tuto substituci bude snadné.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

♣

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\sqrt{x+1} = t$$

Použijeme navrženou substituci.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ ♣

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \sqrt{x+1} &= t \\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x &= 2\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Najdeme vztah mezi diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$. Dostáváme

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

a tuto relaci vynásobíme číslem 2.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx = \int e^{\sqrt{x+1}}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt{x+1} = t\\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx = dt\\ \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\,dt\end{gathered}}$$

$$= \int e^t\, 2\, dt$$

Dosadíme.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{gathered}\sqrt{x+1} = t\\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\\ \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t\end{gathered}}$$

$$= \int e^t 2\,\mathrm{d}t = 2e^t$$

Zintegrujeme.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int e^{\sqrt{x+1}} \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt{x+1} = t\\ \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\\ \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t\end{gathered}}$$

$$= \int e^t 2\,\mathrm{d}t = 2e^t = 2e^{\sqrt{x+1}} + C$$

Užijeme substituci $t = \sqrt{x+1}$ k návratu k původní proměnné. Hotovo.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x$$

- Rozepíšeme funkci $\operatorname{tg} x$ pomocí funkcí $\sin x$ a $\cos x$.
- Lichá mocnina je i v čitateli, i ve jmenovateli. Vybereme si tu v čitateli.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x$$

“Vytáhneme” jednu mocninu funkce $\sin x$ z čitatele.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\sin x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x \,\mathrm{d}x$$

Sudou mocninu převedeme na funkci $\cos x$. Užijeme identitu $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \, dx$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

$$\boxed{\cos x = t}$$

Dosadíme $\cos x = t$.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$\cos x = t$$
$$-\sin x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

Nalezneme vztah mezi diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \mathrm{tg}^3 x\,\mathrm{d}x$.

$$\int \mathrm{tg}^3 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\sin x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \sin x\,\mathrm{d}x &= -\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Přepíšeme výraz $\sin x\,\mathrm{d}x$ do nových proměnných.

©Robert Mařík, 2012

♣

$$\text{Vypočtěte } \int \operatorname{tg}^3 x \, dx.$$

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x \, dx &= dt \\ \sin x \, dx &= -dt \end{aligned}} \quad = \int -\frac{1 - t^2}{t^3} \, dt$$

Dosadíme.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \mathrm{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \mathrm{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \sin x \, \mathrm{d}x &= -\mathrm{d}t \end{aligned}} = \int -\frac{1-t^2}{t^3} \, \mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{t^3} \, \mathrm{d}t$$

Upravíme

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \mathrm{tg}^3 x \,\mathrm{d}x$.

$$\int \mathrm{tg}^3 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\sin x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \sin x\,\mathrm{d}x &= -\mathrm{d}t \end{aligned}} = \int -\frac{1-t^2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t} - t^{-3}\,\mathrm{d}t$$

Protože je jmenovatel jednočlenný, stačí vydělit čitatele výrazem t^3.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \mathrm{tg}^3 x \,\mathrm{d}x$.

$$\int \mathrm{tg}^3 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\sin x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{gathered}\cos x = t\\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\\ \sin x\,\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t\end{gathered}} = \int -\frac{1-t^2}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{t^3}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t} - t^{-3}\,\mathrm{d}t$$

$$= \ln|t| + \frac{1}{2}t^{-2}$$

Nyní integrujeme pomocí vzorců.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$.

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, \mathrm{d}x$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= t \\ -\sin x \, \mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \sin x \, \mathrm{d}x &= -\mathrm{d}t \end{aligned}} = \int -\frac{1-t^2}{t^3} \, \mathrm{d}t = \int \frac{t^2-1}{t^3} \, \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t} - t^{-3} \, \mathrm{d}t$$

$$= \ln|t| + \frac{1}{2} t^{-2} = \ln|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + C$$

Po integraci provedeme návrat k původní proměnné a přidáme integrační konstantu.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x.$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$3x+2=t^2$$

- Člen $3x+2$ je pod odmocninou. Užijeme substituci, která umožní tuto odmocninu odstranit.
- Budeme dosazovat $3x+2=t^2$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$3x+2=t^2$$
$$3\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$$

Nalezneme vztah mezi $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$3x+2=t^2$$

$$3\,\mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

Vyjádříme $\mathrm{d}x$.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$3x+2=t^2$$
$$3\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$
$$\mathrm{d}x = \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$
$$x = \frac{1}{3}(t^2-2)$$

Vyjádříme proměnnou x.

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}$$

Přichystáme si zpětnou substituci. Vyjádříme t pomocí x.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,dx \quad \boxed{\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3\,dx &= 2t\,dt \\ dx &= \frac{2}{3}t\,dt \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}} \quad = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1} \cdot \frac{2}{3}t\,dt$$

Provedeme substituci.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,dx$. ♣

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,dx \quad \boxed{\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3\,dx &= 2t\,dt \\ dx &= \frac{2}{3}t\,dt \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}} \quad = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\cdot\frac{2}{3}t\,dt$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}\cdot t\,dt$$

Upravíme.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \; \boxed{\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}} = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\cdot\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}\cdot t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Převedeme na jeden zlomek.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,dx \quad \boxed{\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3\,dx &= 2t\,dt \\ dx &= \frac{2}{3}t\,dt \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}} \quad = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\cdot\frac{2}{3}t\,dt$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}\cdot t\,dt = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,dt = 2\int 1+\frac{-t-1}{t^2+1}\,dt$$

Vydělíme

$$\frac{t^2-t}{t^2+1} = \frac{(t^2+1)+(-t-1)}{t^2+1} = 1+\frac{-t-1}{t^2+1}$$

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,dx$.

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,dx \quad \boxed{\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3\,dx &= 2t\,dt \\ dx &= \frac{2}{3}t\,dt \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}} \quad = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\cdot\frac{2}{3}t\,dt$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}\cdot t\,dt = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,dt = 2\int 1+\frac{-t-1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\int 1-\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

Získaná funkce je zlomek, který před integrováním rozdělíme na součet zlomku, který má v čitateli derivaci jmenovatele, a zlomku, který má v čitateli jen konstantu. Oba zlomky pak snadno zintegrujeme.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,dx.$ ♣

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,dx \quad \boxed{\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3\,dx &= 2t\,dt \\ dx &= \frac{2}{3}t\,dt \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}} \quad = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\cdot\frac{2}{3}t\,dt$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}\cdot t\,dt = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,dt = 2\int 1+\frac{-t-1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\int 1-\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\,dt = 2\left(t-\frac{1}{2}\ln|t^2+1|-\operatorname{arctg} t\right)+C$$

Integrace je již snadná. Užijeme vztah

$$\int \frac{t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+1).$$

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$\int \frac{\sqrt{3x+2}-1}{x+1}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 3x+2 &= t^2 \\ 3\,\mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t \\ x &= \frac{1}{3}(t^2-2) \\ t &= \sqrt{3x+2} \end{aligned}} = \int \frac{t-1}{\frac{1}{3}(t^2-2)+1}\cdot\frac{2}{3}t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{t-1}{t^2+1}\cdot t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2-t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1+\frac{-t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int 1-\frac{t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\left(t-\frac{1}{2}\ln|t^2+1|-\operatorname{arctg} t\right)+C$$

$$= 2\sqrt{3x+2}-\ln|3x+3|-2\operatorname{arctg}\sqrt{3x+2}+C$$

Roznásobíme závorku a provedeme zpětnou substituci pro návrat k proměnné x.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{1 + \sqrt{x - 1}}{x} \, \mathrm{d}x$.

♣

Funkce obsahuje odmocninu z lineárního výrazu – zavedeme substituci na odstranění odmocniny.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} x-1=t^2 \\ \\ \\ \end{array}}$$

Výraz pod odmocninou je druhá mocnina nové proměnné.

©Robert Mařík, 2012

$$\text{Vypočtěte } \int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x.$$

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{matrix} x-1=t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{matrix}}$$

Nalezneme vztah mezi diferenciály $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$

- $(x-1)' = 1$ (derivace podle x)
- $(t^2)' = 2t$ (derivace podle t)

©Robert Mařík, 2012

♣

Vypočtěte $\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} x-1&=t^2\\ \mathrm{d}x&=2t\,\mathrm{d}t\\ x&=t^2+1\\ \sqrt{x-1}&=t \end{aligned}}$$

Nalezneme x a $\sqrt{x-1}$ ze substitučního vztahu.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$. ♣

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} x-1=t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ x = t^2+1 \\ \sqrt{x-1}=t \end{array}} = \int \frac{1+\sqrt{t^2}}{t^2+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme podle substituce.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

♣

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} x-1=t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ x = t^2+1 \\ \sqrt{x-1}=t \end{array}} = \int \frac{1+\sqrt{t^2}}{t^2+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{1+t}{t^2+1}\cdot t\,\mathrm{d}t$$

Odmocníme t^2 a vytkneme konstantu před integrál.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{gathered} x-1=t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ x = t^2+1 \\ \sqrt{x-1}=t \end{gathered}} = \int \frac{1+\sqrt{t^2}}{t^2+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{1+t}{t^2+1}\cdot t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Převedeme na jeden zlomek – násobíme čitatele.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{c} x-1=t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ x = t^2+1 \\ \sqrt{x-1}=t \end{array}} = \int \frac{1+\sqrt{t^2}}{t^2+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{1+t}{t^2+1}\cdot t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1+\frac{t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Vydělíme čitatel jmenovatelem.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} x-1 &= t^2 \\ \mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \\ x &= t^2+1 \\ \sqrt{x-1} &= t \end{aligned}} = \int \frac{1+\sqrt{t^2}}{t^2+1}\cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int \frac{1+t}{t^2+1}\cdot t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 2\int 1+\frac{t-1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\int 1 + \quad \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

Rozdělíme zlomek na dva jednodušší.

©Robert Mařík, 2012

$$\boxed{\text{Vypočtěte } \int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,dx.}$$

♣

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \boxed{\begin{array}{c} x-1=t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ x = t^2+1 \\ \sqrt{x-1}=t \end{array}} = \int \frac{1+\sqrt{t^2}}{t^2+1}\cdot 2t\,dt$$

$$= 2\int \frac{1+t}{t^2+1}\cdot t\,dt = 2\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\,dt = 2\int 1+\frac{t-1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\int 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}-\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

“Vytvoříme” v čitateli derivaci jmenovatele pomocí multiplikativní konstanty 2.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,dx$.

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \boxed{\begin{aligned} x-1&=t^2\\ dx&=2t\,dt\\ x&=t^2+1\\ \sqrt{x-1}&=t\end{aligned}} = \int \frac{1+\sqrt{t^2}}{t^2+1}\cdot 2t\,dt$$

$$= 2\int \frac{1+t}{t^2+1}\cdot t\,dt = 2\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\,dt = 2\int 1+\frac{t-1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\int 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\left[t + \frac{1}{2}\ln|t^2+1| - \operatorname{arctg} t\right]$$

Zintegrujeme podle vzorců a podle vztahu $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)|$.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,dx$.

♣

$$\int \frac{1+\sqrt{x-1}}{x}\,dx = \boxed{\begin{array}{c} x-1=t^2 \\ dx = 2t\,dt \\ x = t^2+1 \\ \sqrt{x-1} = t \end{array}} = \int \frac{1+\sqrt{t^2}}{t^2+1}\cdot 2t\,dt$$

$$= 2\int \frac{1+t}{t^2+1}\cdot t\,dt = 2\int \frac{t^2+t}{t^2+1}\,dt = 2\int 1 + \frac{t-1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\int 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1} - \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= 2\left[t + \frac{1}{2}\ln|t^2+1| - \operatorname{arctg} t\right]$$

$$= 2\left[\sqrt{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x| - \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right] + C$$

Použijeme zpětnou substituci pro návrat k proměnné x.

©Robert Mařík, 2012

5 Další . . .

Jednotlivé metody je pochopitelně někdy nutno kombinovat.

©Robert Mařík, 2012

Vypočtěte $\int \arcsin x \, dx$

♣

$$\int \arcsin x \, dx \quad \boxed{\begin{array}{ll} u = \arcsin x & u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array}}$$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \quad \boxed{\begin{aligned} 1 - x^2 &= t \\ -2x \, dx &= dt \\ x \, dx &= -\frac{1}{2} \, dt \end{aligned}}$$

$$= x \arcsin x - \int \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{t}} \, dt$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{t}$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

©Robert Mařík, 2012

KONEC

©Robert Mařík, 2012