KONVEXITA, KONKÁVITA

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

I) Definiční obor $x \neq 0$ zlomek $\quad x > 0$ ln $\quad x \in (0, \infty)$

II) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{(1 - \ln x)}{x^2}$

III) $f''(x) = \dfrac{(0 - \frac{1}{\cancel{x}})\cancel{x^2} - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \dfrac{-x - 2x + 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{2x\ln x - 3x}{x^4}$

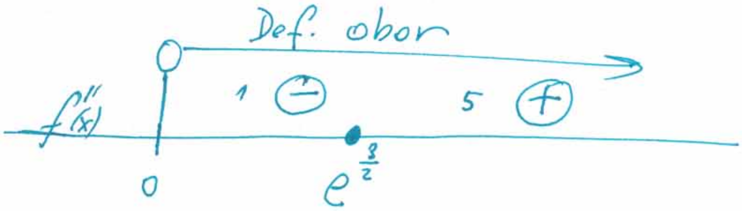
IV) Nulový bod $\dfrac{2x \cdot \ln x - 3x}{x^4} = 0$

jmenovatel je kladný vždy.
Nulový být nemůže kvůli podmínce!)

$2x \cdot \ln x = 3x \quad /:2x$

$\ln x = \frac{3}{2} \quad /\text{od} \ln$

$\underline{x = e^{\frac{3}{2}}} = 4,4816\ldots$



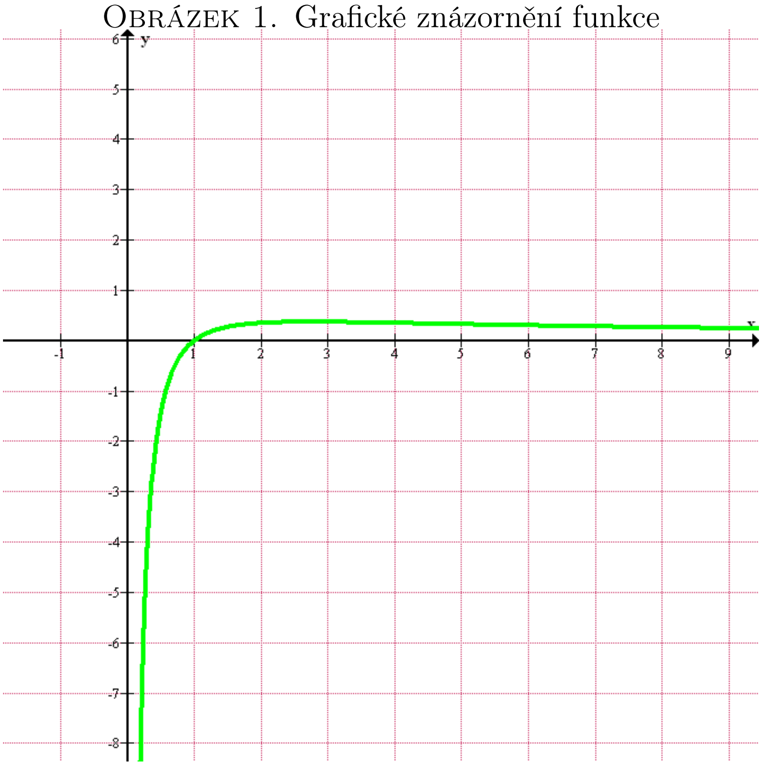
$e^{\frac{3}{2}} = \sqrt{e^3} = \sqrt{2,718^3} = \sqrt{20,07} = 4,48\ldots$

Funkce $f(x)$ je konvexní na intervalu $\langle e^{\frac{3}{2}}, \infty)$
konkávní na intervalu $(0, e^{\frac{3}{2}}\rangle$

+ inflexní bod $\left[\sqrt{e^3}, \dfrac{3}{2\sqrt{e^3}}\right]$

✓

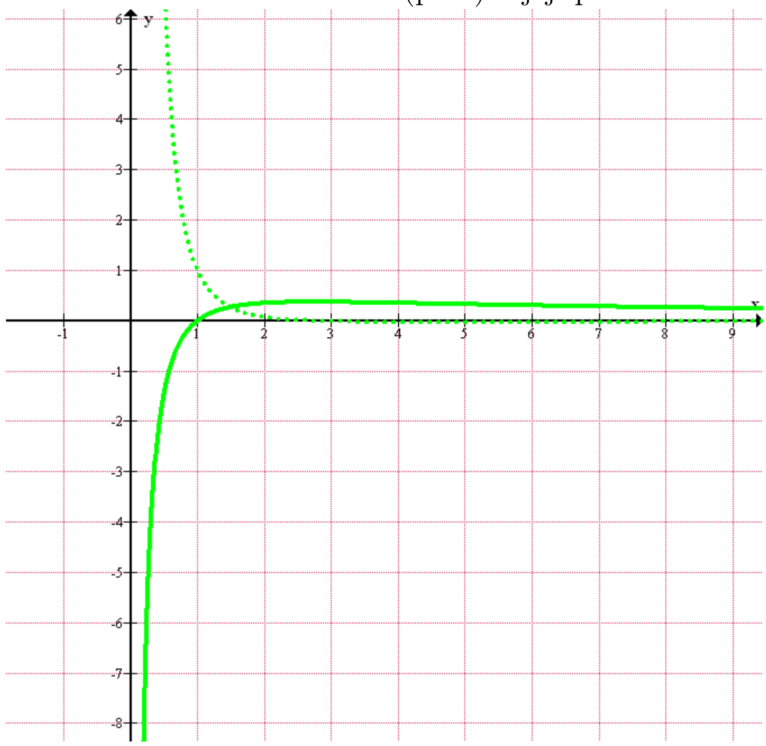
Obrázek 1. Grafické znázornění funkce



Zdroj: program Graph

Zajímá nás průběh funkce – zda a na kterých intervalech je zadaná funkce konvexní a na kterých konkávní na jejím definičním oboru.

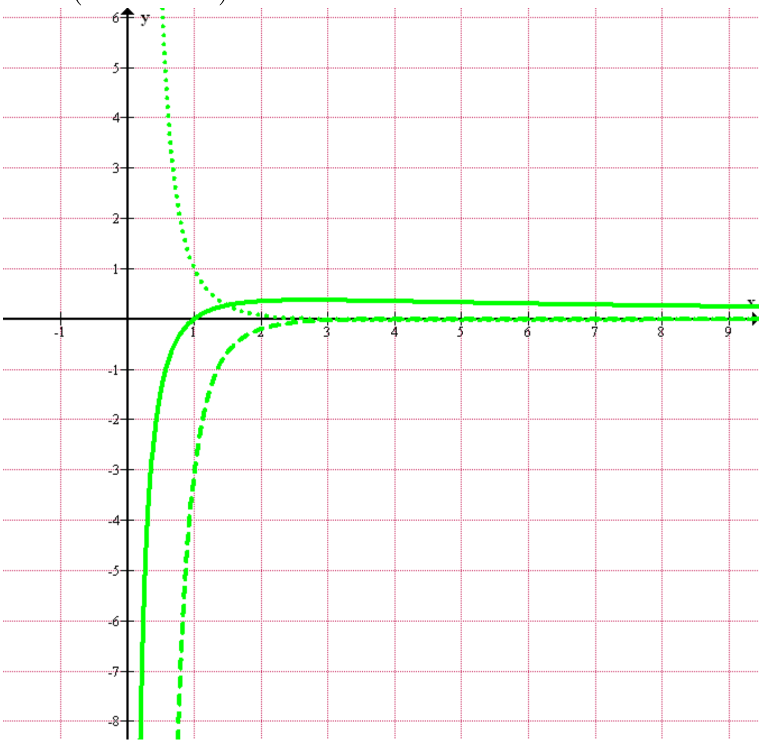
OBRÁZEK 2. Grafické znázornění funkce (plná) a její první derivace (tečkovaná)



Zdroj: program Graph

Ke zjištění konvexnosti a konkávnosti potřebujeme druhou derivaci. První derivace je tedy pouhým mezisoučtem. (Nicméně z první derivace můžeme vyčíst monotónnost funkce. Kde je původní funkce rostoucí, tam je derivace *nad* osou x. Kde je klesající, tam je *pod* osou x. V místech extrémů první derivace osu x protíná.)

OBRÁZEK 3. Grafické znázornění funkce (plná), její první derivace (tečkovaná) a druhá derivace (čárkovaná)



Zdroj: program Graph

Kde je původní funkce konvexní, tam je druhá derivace *nad* osou x. Kde je konkávní, tam je druhá derivace *pod* osou x. V místech inflexních bodů druhá derivace osu x protíná.