

INVERZNÍ FUNKCE

Co je to vlastně inverzní funkce? Co je naším úkolem při výpočtu inverzní funkce? Laicky řečeno, inverzní funkce zobrazuje hodnoty „opačným směrem“ než původní funkce, jak je zřejmé z Tabulky 1. Z toho také vyplývá, že funkce $f : y = x$ je inverzní sama k sobě.

Právě ke každé *prosté* funkci lze nalézt inverzní funkci. To znamená, že ne ke každé funkci jsme schopni inverzní funkci sestrojít. Např. funkce $f : y = x^2$ definovaná na celém \mathbb{R} není prostá, a proto k ní nejsme schopni sestrojít na tomto definičním oboru inverzní funkci. Lze ji však nalézt k její vhodně zvolené části – viz Tabulka 2 třetí příklad. To samé se týká funkce $f : y = \sin x$ v posledních dvou příkladech zmíněné tabulky.

TABULKA 1. Funkční hodnoty funkce $f : y = 2x$ a její inverzní funkce

$f : y = 2x$	\Rightarrow	$f^{-1} : y = \frac{x}{2}$
$f(1) = 2$		$f^{-1}(2) = 1$
$f(2) = 4$		$f^{-1}(4) = 2$
$f(3) = 6$	\Rightarrow	$f^{-1}(6) = 3$
$f(4) = 8$		$f^{-1}(8) = 4$
$f(5) = 10$		$f^{-1}(10) = 5$

Příklad

$$\begin{aligned}
 f : y &= \frac{x+1}{3x-4} \quad / \cdot (3x-4) \\
 y \cdot (3x-4) &= x+1 \\
 3xy - 4y &= x+1 \quad / \text{roznásobení levé strany} \\
 3xy - x &= 1+4y \quad / -x \quad / +4y \\
 x(3y-1) &= 4y+1 \quad / \text{vytčení } x \\
 x &= \frac{4y+1}{3y-1} \quad \text{inverzní funkce (k } y \text{ nalezneme } x) \\
 \hline
 f^{-1} : y &= \frac{4x+1}{3x-1} \quad / \text{přeznačení proměnných } x \leftrightarrow y
 \end{aligned}$$

Tabulka 2 ukazuje celkem pět příkladů funkcí a jejich inverzních funkcí. V každém řádku je uveden jeden příklad, na obrázcích jsou celkem 3 křivky:

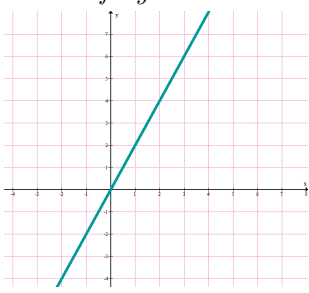
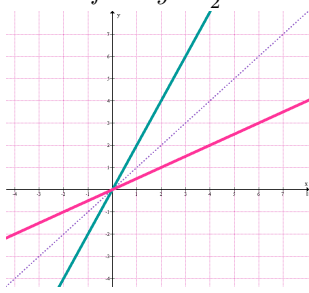
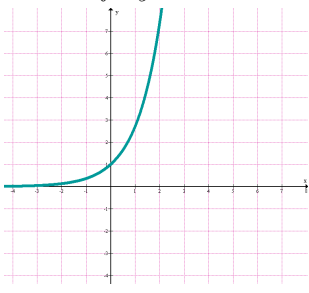
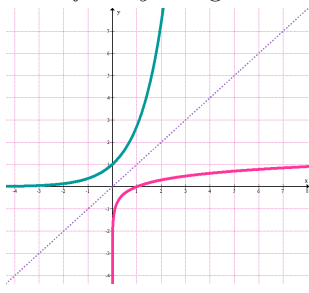
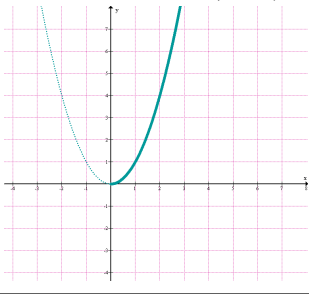
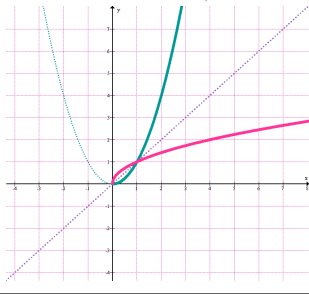
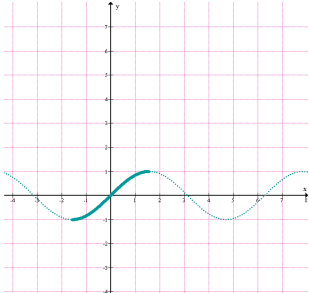
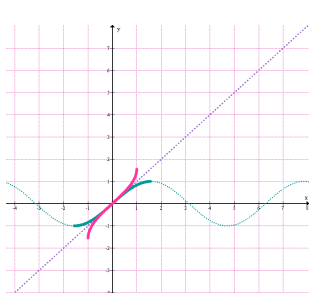
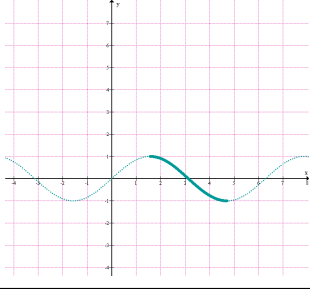
■ petrolejová = zadaná funkce

- plná = část zadané funkce k níž JE sestrojena inverzní funkce
- tečkovaná = část zadané funkce k níž NENÍ sestrojena inverzní funkce

■ růžová (plná) = inverzní funkce

■ fialová (tečkovaná) = osa, podle níž je původní funkce „překlopena“

TABULKA 2. Inverzní funkce

Zadaná funkce	\Rightarrow	Inverzní funkce
$f : y = 2x$ 	\Rightarrow	$f^{-1} : y = \frac{x}{2}$ 
$f : y = e^x$ 	\Rightarrow	$f^{-1} : y = \log x$ 
$f : y = x^2, x \in (0; \infty)$ 	\Rightarrow	$f^{-1} : y = \sqrt{x}$ 
$f : y = \sin x, x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ 	\Rightarrow	$f^{-1} : y = \arcsin x$ 
$f : y = \sin x, x \in \langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \rangle$ 	\Rightarrow	$f^{-1} : y = \pi - \arcsin x$ 