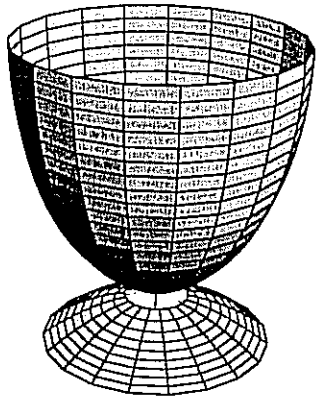
199 ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ K MATEMATICE I

Eva Hnátková

Šárka Dvořáková



2002

Obsah

DEFINIČNÍ OBOR FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

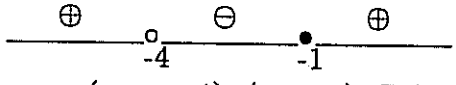
Příklad 1. Určete definiční obor funkce $f(x) = \ln \frac{5+4x-x^2}{x^4-x^3} + \sqrt{\frac{1}{x}}$.

Řešení. Aby měl funkční předpis smysl, musí být splněny podmínky $\frac{5+4x-x^2}{x^4-x^3} > 0$, $x^4 - x^3 \neq 0$, $\frac{1}{x} \geq 0$ a $x \neq 0$. Řešme nejprve první nerovnici. Násobíme-li obě strany nerovnice číslem -1 (musíme změnit znaménko nerovnosti), dostaneme $\frac{x^2-4x-5}{x^4-x^3} < 0$ a po rozkladu čitatele a jmenovatele $\frac{(x+1)(x-5)}{x^3(x-1)} < 0$ a $x \neq 0$ a $x \neq 1$. Nulovými body nerovnice jsou tedy $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$, $x = 5$. Tyto nulové body rozdělí číselnou osu na pět intervalů, v nichž budeme zjišťovat znaménko výrazu $\frac{(x+1)(x-5)}{x^3(x-1)}$. Znázorníme graficky.

Ze znamének v jednotlivých intervalech vidíme, že řešením první nerovnice je $x \in (-1, 0) \cup (1, 5)$. Podmínkám $\frac{1}{x} \geq 0$ a $x \neq 0$ vyhovují $x > 0$, proto $D(f) = (1, 5)$.

Příklad 2. Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin \frac{x-2}{x+4} + \frac{1}{\ln(8-x)}$.

Řešení. Musí platit $-1 \leq \frac{x-2}{x+4} \leq 1$, $x + 4 \neq 0$, $\ln(8 - x) \neq 0$ a $8 - x > 0$. Z toho po úpravě $0 \leq \frac{x-2}{x+4} + 1$ a $\frac{x-2}{x+4} - 1 \leq 0$, $x \neq -4$, $8 - x \neq 1$, $x < 8$. A dále $0 \leq \frac{2x+2}{x+4}$ a $\frac{-6}{x+4} \leq 0$, $x \neq -4$, $x \neq 7$ a $x < 8$. Řešení první nerovnice metodou nulových bodů znázorněme graficky.



Nerovnice je splněna pro $x \in (-\infty, -4) \cup (-1, \infty)$. Z druhé nerovnice je vidět, že $x+4 > 0$, tj. $x > -4$, a protože zároveň $x < 8$ a $x \neq 7$, je $D(f) = (-1, 7) \cup (7, 8)$.

Příklad 3. Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-x-6}{\log(1+x)}} + \sqrt{\log(\log(15 - x))}$.

Řešení. Musí platit $\frac{x^2-x-6}{\log(1+x)} \geq 0$, $\log(1 + x) \neq 0$, $1 + x > 0$ a zároveň podmínky vyplývající z druhého sčítance funkčního předpisu zadané funkce, tedy $\log(\log(15 - x)) \geq 0$, $\log(15 - x) > 0$ a $15 - x > 0$. Řešme nejprve podmínky vyplývající z prvního sčítance funkčního předpisu. Po úpravě $\frac{(x-3)(x+2)}{\log(1+x)} \geq 0$ a $1 + x \neq 1$ a $x > -1$. Z prostřední nerovnosti plyne, že $x \neq 0$. První nerovnici řešíme metodou nulových bodů.

Znaménka zlomku budeme určovat pouze na intervalu $(-1, \infty)$, neboť $\log(1 + x)$ není pro $x < -1$ definován. Částečným řešením je $x \in (-1, 0) \cup (3, \infty)$. Nyní řešme podmínky vyplývající z druhého sčítance funkčního předpisu: $\log(\log(15-x)) \geq 0$, $\log(15-x) > 0$, $15 - x > 0$, tedy po úpravě $\log(15 - x) \geq 1$, $15 - x > 1$, $x < 15$, tedy $15 - x \geq 10$, $x < 14$, $x < 15$, tedy $x \leq 5$. Definičním oborem funkce je $D(f) = (-1, 0) \cup (3, 5)$.

Příklad 4. Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\ln \frac{x+1}{x-1}} + \frac{1}{\log(x-2)-1}$.

Řešení. Musí být splněny tyto podmínky: $\ln \frac{x+1}{x-1} \geq 0$, $\frac{x+1}{x-1} > 0$, $x - 1 \neq 0$, $\log(x - 2) - 1 \neq 0$ a $x - 2 > 0$. Z první podmínky plyne, že $\frac{x+1}{x-1} \geq 1$, tím je splněna

i podmínka druhá, dále $x \neq 1$ a $\log(x-2) \neq 1$, tj. $x-2 \neq 10$, a tedy $x \neq 12$ a současně $x > 2$. Z podmínky $\frac{x+1}{x-1} \geq 1$ plyne $\frac{x+1}{x-1} - 1 \geq 0$, tj. $\frac{2}{x-1} \geq 0$. Podmínka bude splněna, bude-li $x - 1 > 0$, což je pro $x > 2$ vždy. Uděláme-li průnik všech podmínek, dostaneme $D(f) = (2, 12) \cup (12, \infty)$.

Příklad 5. Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{1}{1-\sqrt{1-\ln x}} + \sqrt{x^2-1}$.

Řešení. Musí být splněny následující podmínky: $1 - \ln x \geq 0$, $1 - \sqrt{1-\ln x} \neq 0$, $x > 0$ a $x^2 - 1 \geq 0$. Z první podmínky plyne $\ln x \leq 1$, tj. $x \leq \mathrm{e}$. Z druhé podmínky je $1 - \ln x \neq 1$, tj. $x \neq 1$, a podle definice funkce $\ln x$ je $x > 0$. Průnikem těchto podmínek je $x \in (0,1) \cup (1, \mathrm{e}\rangle$. Z poslední podmínky vyplývá $x^2 \geq 1$, tj. $|x| \geq 1$, tedy $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty)$. Průnikem těchto množin $((0,1) \cup (1,\mathrm{e})) \cap ((-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,\infty))$ dostaneme definiční obor funkce $D(f) = (1, \mathrm{e}\rangle$.

Příklad 6. Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin\sqrt{1-4x} + 2x \cdot \sqrt{x-4x^2}$.

Řešení. Musí platit $-1 \leq \sqrt{1-4x} \leq 1$, $1 - 4x \geq 0$ a $x - 4x^2 \geq 0$. Jelikož je vždy $\sqrt{1-4x} \geq 0$, upravíme první nerovnici na tvar $0 \leq \sqrt{1-4x} \leq 1$, z čehož po umocnění plyne $0 \leq 1 - 4x \leq 1$. Po odečtení jedničky od všech stran nerovnice $-1 \leq -4x \leq 0$, po vynásobení nerovnice číslem $-\frac{1}{4}$ je $\frac{1}{4} \geq x \geq 0$, a tedy $x \in \langle 0, \frac{1}{4}\rangle$. V tomto závěru je již obsažena i druhá podmínka. Z třetí podmínky po rozkladu na $x(1-4x) \geq 0$ již nedostaneme nic nového, neboť musí-li být $1 - 4x \geq 0$, potom i $x \geq 0$, ale to už je obsaženo v podmínce minulé. Závěrem je tedy $D(f) = \langle 0, \frac{1}{4}\rangle$.

Příklad 7. Určete definiční obor funkce $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{\mathrm{e}^x - 1} + \frac{1}{\sqrt{32+4x-x^2}}$.

Řešení. Z podmínky $\mathrm{e}^x - 1 \geq 0$ plyne $x \geq 0$. Dále musí platit $32 + 4x - x^2 > 0$, což rozložíme na součin $-(x+4)(x-8) > 0$. Řešení této nerovnice metodou nulových bodů znázorněme graficky.

$$\ominus \quad \underset{-4}{\circ} \quad \oplus \quad \underset{8}{\circ} \quad \ominus$$

Protože platí $x \geq 0$ a zároveň $x \in (-4, 8)$, pak definičním oborem funkce je $D(f) = \langle 0, 8)$.

Příklad 8. Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-11x+24}{27-3^x}} + \frac{1+\operatorname{arccotg} x}{1-\log(x+3)}$.

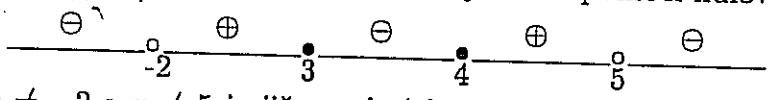
Řešení. Musí platit $\frac{x^2-11x+24}{27-3^x} \geq 0$, $27 - 3^x \neq 0$, $1 - \log(x+3) \neq 0$ a $x + 3 > 0$. Řešme nejprve první nerovnici, tedy $\frac{(x-8)(x-3)}{27-3^x} \geq 0$. Nulové body příslušné této nerovnici jsou body $x = 3$, $x = 8$ a $x = 3$. Bod $x = 3$ se tedy vyskytuje dvakrát jako nulový bod téže nerovnice. Znázorněme graficky.

$$\oplus \quad \underset{3}{\circ} \quad \overset{-}{\oplus} \quad \underset{8}{\bullet} \quad \overset{+}{\ominus}$$

Nerovnice je splněna pro $(-\infty, 3) \cup (3, 8\rangle$. Řešením nerovnice $x+3 > 0$ je interval $(-3, \infty)$, z podmínky $1 - \log(x+3) \neq 0$ plyne $\log(x+3) \neq 1$ a odsud $x + 3 \neq 10$, tj. $x \neq 7$. Průnikem řešení všech jednotlivých podmínek dostáváme $D(f) = (-3, 3) \cup (3, 7) \cup (7, 8\rangle$.

Příklad 9. Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-7x+12}{10+3x-x^2}} + \frac{1}{x} + \ln(x+1)$.

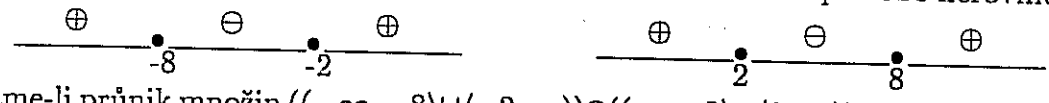
Řešení. Musí platit $\frac{x^2-7x+12}{10+3x-x^2} \geq 0$, $10+3x-x^2 \neq 0$, $x \neq 0$ a $x+1 > 0$. První podmínku upravíme na tvar $\frac{(x-3)(x-4)}{-(x+2)(x-5)} \geq 0$. Tuto nerovnici vyřešíme pomocí nulových bodů.



Druhá podmínka $x \neq -2$ a $x \neq 5$ je již na obrázku znázorněna. Protože musí zároveň platit $x \neq 0$ a $x > -1$, dostaneme výsledek $D(f) = (-1,0) \cup (0,3\rangle \cup \langle 4,5)$.

Příklad 10. Určete definiční obor funkce $f(x) = \arcsin \frac{10x}{x^2+16}$.

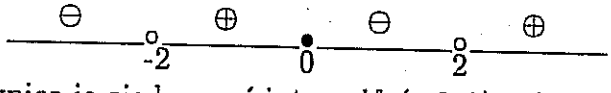
Řešení. Musí platit $-1 \leq \frac{10x}{x^2+16} \leq 1$. Jelikož $x^2+16 > 0$ pro všechna $x \in \mathbf{R}$, můžeme tímto výrazem nerovnici vynásobit a dostaneme $-x^2-16 \leq 10x \leq x^2+16$, z toho $0 \leq x^2+10x+16$ a současně $0 \leq x^2-10x+16$. Po rozložení obou kvadratických trojčlenů na součiny dostaneme $0 \leq (x+2)(x+8)$ a $0 \leq (x-2)(x-8)$. Opět schematicky znázorníme nulové body a znaménka v jednotlivých intervalech pro obě nerovnice.



Uděláme-li průnik množin $((-\infty,-8\rangle \cup \langle -2,\infty)) \cap ((-\infty,2\rangle \cup \langle 8,\infty))$, dostaneme definiční obor $D(f) = (-\infty,-8\rangle \cup \langle -2,2\rangle \cup \langle 8,\infty)$.

Příklad 11. Určete definiční obor funkce $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}} + \log_2(x+1)$

Řešení. Musí být splněny podmínky $\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} \geq 0$, $x-2 \neq 0$, $x+2 \neq 0$ a $x+1 > 0$. Upravíme první podmínku uvedením na společného jmenovatele $\frac{x^2+4x+4-(x^2-4x+4)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$, tedy $\frac{8x}{(x-2)(x+2)} \geq 0$. Nulovými body tohoto výrazu jsou $x = 0$ a $x = \pm 2$.



Řešením této nerovnice je sjednocení intervalů $(-2,0\rangle \cup (2,\infty)$. Vzhledem k podmínce $x+1 > 0$, tedy $x > -1$, je hledaný definiční obor funkce $D(f) = (-1,0\rangle \cup (2,\infty)$.

Příklad 12. Určete definiční obor funkce $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{81-4x^2}} - \frac{5-x}{x^3-16x}$.

Řešení. Aby měl funkční předpis smysl, musí platit $81-4x^2 \geq 0$ a $x^3-16x \neq 0$. Řešme nejprve první podmínku $4x^2 \leq 81$, tedy $x^2 \leq \frac{81}{4}$, po odmocnění $|x| \leq \frac{9}{2}$. Této podmínce vyhovují $x \in \langle -\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\rangle$. Rozkladem druhé podmínky na součin dostaneme $x(x-4)(x+4) \neq 0$, tedy $x \neq 0$ a $x \neq \pm 4$. Průnikem řešení všech podmínek je definiční obor funkce $D(f) = \langle -\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\rangle \setminus \{-4,0,4\}$.

Příklad 13. Určete definiční obor funkce $f(x) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}{\ln(2-x)}$.

Řešení. Musí být splněny podmínky $\mathrm{e}^x - 1 \geq 0$, $\ln(2-x) \neq 0$ a $2-x > 0$. Z toho postupně plyne $\mathrm{e}^x \geq 1$, tj. $x \geq 0$, dále $2-x \neq 1$, tj. $x \neq 1$ a $x < 2$. Průnikem řešení všech těchto podmínek dostaneme $D(f) = \langle 0,1) \cup (1,2)$.

Příklad 14. Určete definiční obor funkce $f(x) = \operatorname{arctg}(2x-3) + \frac{1}{x^2+4} - \ln \frac{1+2^x}{2^x}$.

Řešení. Funkce arkustangens je definována pro všechna reálná čísla, výraz x^2+4 nabývá pouze kladných hodnot (je tedy různý od nuly), výraz 2^x je pro všechna x kladný (je tedy kladný i výraz $1+2^x$). Definičním oborem jsou všechna reálná čísla, $D(f) = \mathbf{R}$.

DEFINIČNÍ OBOR FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

Příklad 1. Načrtněte definiční obor funkce dvou proměnných dané předpisem $f(x,y) = \sqrt{\frac{y^2-x^4}{y^2-1}}$.

Řešení. Aby měl funkční předpis smysl, musí být splněny následující podmínky: $\frac{y^2-x^4}{y^2-1} \geq 0$ a $y^2 - 1 \neq 0$. Nerovnici upravíme na tvar $\frac{(y-x^2)(y+x^2)}{(y-1)(y+1)} \geq 0$. Zobrazme v rovině nulové křivky příslušné dané nerovnici. Jsou to křivky $y - x^2 = 0$, $y + x^2 = 0$, $y - 1 = 0$, $y + 1 = 0$ (tj. paraboly $y = x^2$, $y = -x^2$ a přímky $y = 1$, $y = -1$). Křivky, jejichž body vyhovují podmínkám, zobrazíme plnou čarou (v našem případě obě paraboly), křivky, jejichž body podmínkám nevyhovují, čarou čárkovanou (v našem případě obě přímky). Grafy těchto funkcí rozdělí reálnou rovinu na deset oblastí. Dosazením vnitřního bodu každé této oblasti do výrazu $\frac{(y-x^2)(y+x^2)}{(y-1)(y+1)}$ zjistíme znaménko této oblasti, tedy zda všechny body zkoumané oblasti patří do řešení nerovnice $\frac{(y-x^2)(y+x^2)}{(y-1)(y+1)} \geq 0$. Řešení této nerovnice je zobrazeno na obr. 1.

Příklad 2. Načrtněte definiční obor funkce dvou proměnných dané předpisem $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2-9}{y^2-x^2}} + \sqrt{16-y^2}$.

Řešení. Aby měl funkční předpis smysl, musí být splněny následující podmínky: $\frac{x^2+y^2-9}{y^2-x^2} \geq 0$, $y^2 - x^2 \neq 0$ a $16 - y^2 \geq 0$. Vyřešme nejprve první nerovnici. Jmenovatel rozložíme na součin $\frac{x^2+y^2-9}{(y-x)(y+x)} \geq 0$ a v rovině zobrazíme nulové křivky této nerovnice: $x^2 + y^2 - 9 = 0$, $y - x = 0$, $y + x = 0$ (tedy kružnice se středem v počátku a poloměrem 3 plnou čarou a přímky $y = x$ a $y = -x$ čarou čárkovanou). Řešení této nerovnice je na obr. 2a. Řešme nyní druhou nerovnici $16 - y^2 \geq 0$, tedy $y^2 \leq 16$, řešením jsou ty body reálné roviny, jejichž y-ová souřadnice leží v intervalu $\langle -4, 4\rangle$, tedy body ležící mezi přímkami $y = -4$ a $y = 4$, včetně bodů těchto přímek, viz. obr. 2b. Hledaný definiční obor zobrazený na obr. 2c je průnikem obou dílčích řešení.

Příklad 3. Načrtněte definiční obor funkce dvou proměnných dané předpisem $f(x,y) = \sqrt{(e^x - y)(e^{-x} - y)} + \sqrt{y} + \log(5-y)$.

Řešení. Aby měl daný funkční předpis smysl, musí platit $(e^x - y)(e^{-x} - y) \geq 0$, $y \geq 0$ a $5 - y > 0$. Zobrazme v rovině nulové křivky příslušné první nerovnici. Jsou to křivky $e^x - y = 0$ a $e^{-x} - y = 0$, tj. $y = e^x$ a $y = e^{-x}$. Řešení této nerovnice je zobrazeno na obr. 3a. Průnik řešení zbývajících nerovnic (tedy $y \in \langle 0, 5)$) je na obr. 3b. Průnikem řešení všech podmínek dostaneme požadovaný výsledek, který je zobrazen na obr. 3c.

Příklad 4. Načrtněte definiční obor funkce dvou proměnných dané předpisem $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+4y^2-6x+5}{x-3}} + \log_2(4-x)$.

Řešení. Aby měl funkční předpis smysl, musí být splněny následující podmínky: $\frac{x^2+4y^2-6x+5}{x-3} \geq 0$, $x - 3 \neq 0$ a $4 - x > 0$. Nulovými křivkami první nerovnice jsou $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x - 3 = 0$. Po úpravě první rovnice na středový tvar $\frac{(x-3)^2}{4} + y^2 = 1$ je zřejmé, že se jedná o elipsu se středem v bodě $[3, 0]$ a poloosami o velikosti 2 a 1,

druhá nulová křivka je přímka $x = 3$. Zobrazme v rovině tyto křivky a určeme, které ze vzniklých oblastí splňují řešenou nerovnici. Zároveň z druhé nerovnice ($x < 4$) vyplývá, že řešením jsou pouze body ležící v polorovině vlevo od přímky $x = 4$. Definiční obor funkce je zobrazen na obr. 4.

Příklad 5. Načrtněte definiční obor funkce dvou proměnných dané předpisem $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-2x+y^2-4y+4}{4-x^2}} + \ln(9-y^2) + \frac{1}{x^2+y^2}$.

Řešení. Nejprve si určíme omezující podmínky. Musí platit $\frac{x^2-2x+y^2-4y+4}{4-x^2} \geq 0$, $4-x^2 \neq 0$, $9-y^2 > 0$ a $x^2+y^2 \neq 0$. V rovině si zobrazme nulové křivky příslušné první nerovnici. Jsou to křivky $x^2-2x+y^2-4y+4 = 0$ (po úpravě $(x-1)^2+(y-2)^2 = 1$, tedy kružnice se středem v bodě $[1,2]$ a poloměrem 1) a $x^2-4 = 0$ (přímky o rovnicích $x = 2$ a $x = -2$). Řešení této nerovnice je zobrazeno na obr. 5a. Nulová křivka příslušná druhé nerovnici je $9-y^2 = 0$ (jsou to přímky o rovnicích $y = 3$ a $y = -3$). Řešení druhé nerovnice je zobrazeno na obr. 5b. Podmínku $x^2+y^2 \neq 0$ splňují všechny body roviny kromě bodu $[0,0]$ (součet dvou nezáporných výrazů je roven nule, pouze pokud jsou tyto výrazy zároveň rovny nule). Průnikem řešení všech podmínek dostaneme požadovaný výsledek, který je zobrazen na obr. 5c.

Příklad 6. Načrtněte definiční obor funkce dvou proměnných dané předpisem $f(x,y) = \sqrt{\frac{\ln x-y}{\ln x+y}} + \sqrt{1-y^2}$.

Řešení. Aby měl funkční předpis smysl, musí být splněny následující podmínky: $\frac{\ln x-y}{\ln x+y} \geq 0$, $\ln x + y \neq 0$, $x > 0$ a $1-y^2 \geq 0$. V rovině si zobrazme nulové křivky příslušné první nerovnici. Jsou to křivky $\ln x - y = 0$ a $\ln x + y = 0$, tj. $y = \ln x$ a $y = -\ln x$. Podmínku $x > 0$ splňují právě všechny body roviny, které leží napravo od osy y (tj. přímky o rovnici $x = 0$). Řešení této nerovnice je zobrazeno na obr. 6a. Nulová křivka příslušná druhé nerovnici je $1-y^2 = 0$ (jsou to přímky o rovnicích $y = 1$ a $y = -1$). Řešení druhé nerovnice je zobrazeno na obr. 6b. Průnikem řešení všech podmínek dostaneme požadovaný výsledek, který je zobrazen na obr. 6c.

Příklad 7. Načrtněte definiční obor funkce dvou proměnných dané předpisem $f(x,y) = \sqrt{\frac{y-e^x}{x+y^2-1}} + \ln(4-y^2) + \sqrt{\log(x+3)}$.

Řešení. Nejprve si určíme omezující podmínky. Musí zároveň platit $\frac{y-e^x}{x+y^2-1} \geq 0$, $x+y^2-1 \neq 0$, $4-y^2 > 0$, $\log(x+3) \geq 0$ a $x+3 > 0$. V rovině si zobrazme nulové křivky příslušné první nerovnici. Jsou to křivky $y-e^x = 0$ (graf funkce $y = e^x$) a $x+y^2-1 = 0$ (parabola s vrcholem v bodě $[1,0]$ a osou na ose x). Řešení této nerovnice je zobrazeno na obr. 7a. Nulová křivka příslušná druhé nerovnici je $4-y^2 = 0$ (jsou to přímky o rovnicích $y = 2$ a $y = -2$). Řešení druhé nerovnice je zobrazeno na obr. 7b. Řešením zbývajících podmínek $\log(x+3) \geq 0$ (tedy $x+3 \geq 0$, tj. $x \geq -2$) a $x+3 > 0$ je polorovina vpravo od přímky $x = -2$ včetně této přímky. Průnikem všech dílčích řešení dostaneme požadovaný výsledek, který je zobrazen na obr. 7c.

Příklad 8. Načrtněte definiční obor funkce dvou proměnných dané předpisem $f(x,y) = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{x-y}}$.

Řešení. Aby měl funkční předpis smysl, musí být splněny následující podmínky: $\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{x-y} \geq 0$, $x - y \neq 0$ a vzhledem k definičnímu oboru funkce tangens musí platit $\frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Nulové křivky nerovnice jsou $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = 0$ a $x - y = 0$. Funkce tangens je rovna nule v celočíselných násobcích čísla π, není definována v lichých násobcích $\frac{\pi}{2}$, tedy v našem případě $\frac{\pi x}{2} = k\pi$, $\frac{\pi x}{2} \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$. Po úpravě $x = 2k$ a $x \neq 2k+1$, nulovými křivkami jsou tedy právě přímky rovnoběžné s osou y procházející na ose x celými čísly a dále přímka $x - y = 0$. Hledaný definiční obor je na obr. 8.

Příklad 9. Načrtněte definiční obor funkce dvou proměnných dané předpisem $f(x,y) = \arcsin(x^2 + y^2 - 3) + \arccos(y - x)$.

Řešení. Aby měl funkční předpis smysl, musí být splněny následující podmínky: $-1 \leq x^2+y^2-3 \leq 1$ a $-1 \leq y-x \leq 1$. Řešme nejprve první podmínku. Po přičtení čísla 3 ke všem stranám nerovnice dostaneme nerovnici $2 \leq x^2+y^2 \leq 4$. Nerovnici $2 \leq x^2+y^2$ splňují ty body roviny, které leží vně kruhu se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{2}$ včetně hraniční kružnice, nerovnici $x^2 + y^2 \leq 4$ splňují ty body roviny, které leží uvnitř kruhu se středem v počátku a poloměrem 2 včetně hraniční kružnice. Průnik obou podmínek je na obr. 9a. Nyní vyřešme podmínku $-1 \leq y - x \leq 1$. Přičteme-li x ke všem výrazům v nerovnici, dostaneme $x - 1 \leq y \leq x + 1$. Řešením nerovnice $x - 1 \leq y$ je polorovina nad přímkou $y = x - 1$, řešením nerovnice $y \leq x + 1$ polorovina pod přímkou $y = x + 1$, v obou případech včetně hraniční přímky. Průnik těchto podmínek je na obr. 9b. Hledaný definiční obor je na obr. 9c.

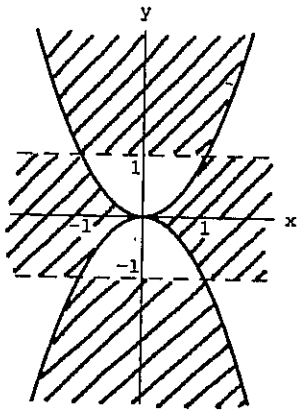
Příklad 10. Načrtněte definiční obor funkce dvou proměnných dané předpisem $f(x,y) = \log\frac{y-\sin x+2}{-y-\sin x-2} + \log(16 - x^2) + \frac{1}{(x^2-1)^2+(y+2)^2}$.

Řešení. Aby měl funkční předpis smysl, musí být splněny následující podmínky: $\frac{y-\sin x+2}{-y-\sin x-2} > 0$, $-y-\sin x-2 \neq 0$, $16-x^2 > 0$ a $(x^2-1)^2+(y+2)^2 \neq 0$. Zobrazme v rovině nulové křivky příslušné první nerovnici. Jsou to křivky $y-\sin x+2 = 0$, $-y-\sin x-2 = 0$ (tedy grafy funkcí $y = \sin x - 2$ a $y = -\sin x - 2$). Řešení této nerovnice je na obr. 10a. Nulovými křivkami nerovnice $16 - x^2 > 0$, tedy $(4 - x)(4 + x) > 0$ jsou přímky $x = 4$ a $x = -4$. Řešení této nerovnice je na obr. 10b. Podmínku $(x^2 - 1)^2 + (y + 2)^2 \neq 0$ splňují všechny body roviny kromě bodů, pro které platí $(x^2-1)^2 = 0$ ($|x| = 1$) a zároveň $(y + 2)^2 = 0$ ($y = -2$), tedy bodů $[-1, -2]$ a $[1, -2]$. Hledaný definiční obor funkce je průnikem řešení všech podmínek a je zobrazen na obr. 10c.

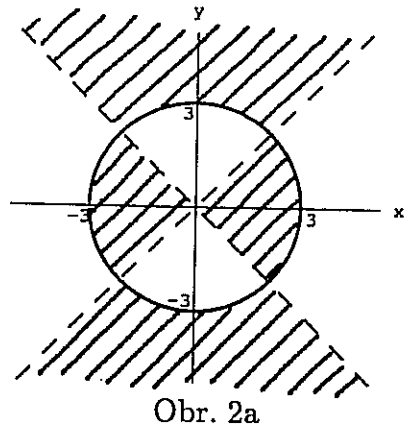
Příklad 11. Načrtněte definiční obor funkce dvou proměnných dané předpisem $f(x,y) = \sqrt{y^2 + 1} - \ln \operatorname{arccotg}(x - 3)$.

Řešení. Aby měl funkční předpis smysl, musí být splněny následující podmínky: $y^2 + 1 \geq 0$ a $\operatorname{arccotg}(x - 3) > 0$. První podmínka je splněna pro všechna reálná y. Funkce arkuskotangens (jejímž definičním oborem jsou všechna reálná čísla) nabývá na celém svém definičním oboru kladných hodnot, druhá podmínka je proto splněna pro všechna reálná x. Definičním oborem dané funkce je tedy $D(f) = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

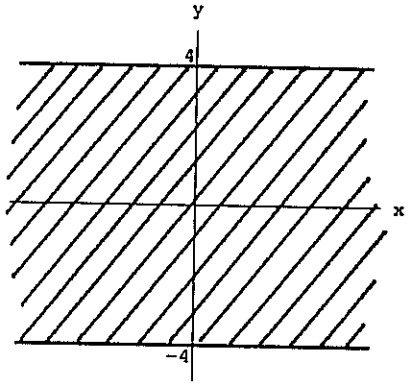
Poznámka k obrázkům: Body, které leží na průsečíku čáry plné a čárkované, nepatří do definičního oboru funkce.



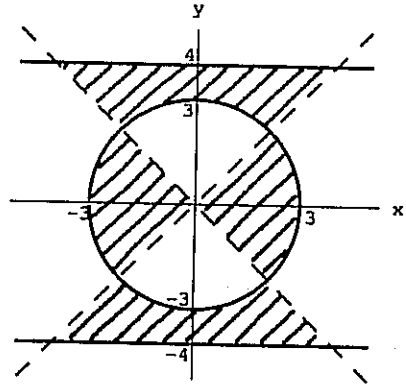
Obr. 1



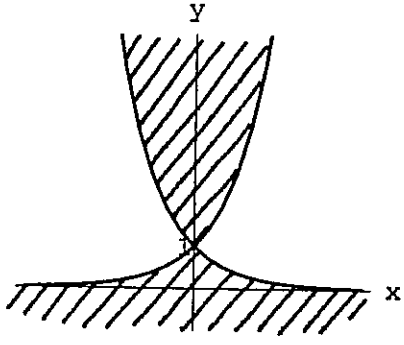
Obr. 2a



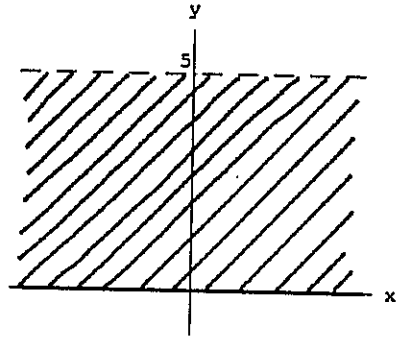
Obr. 2b



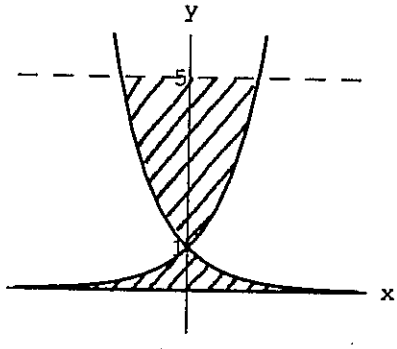
Obr. 2c



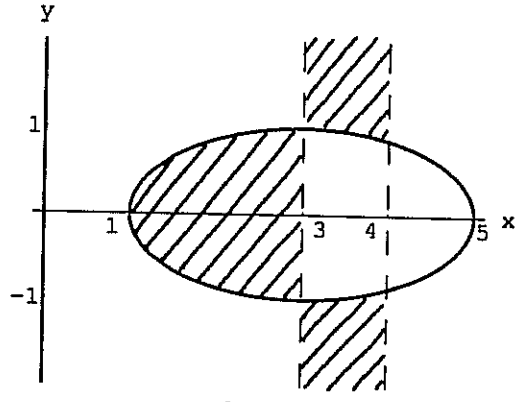
Obr. 3a



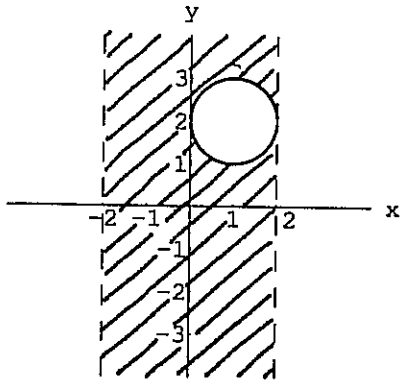
Obr. 3b



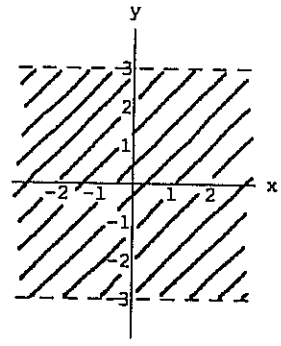
Obr. 3c



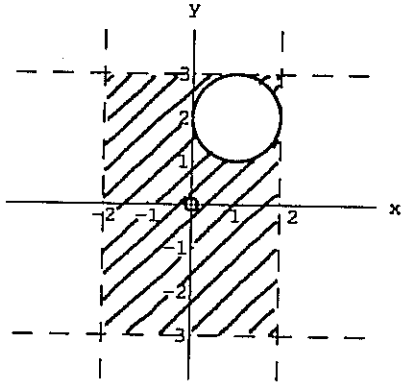
Obr. 4



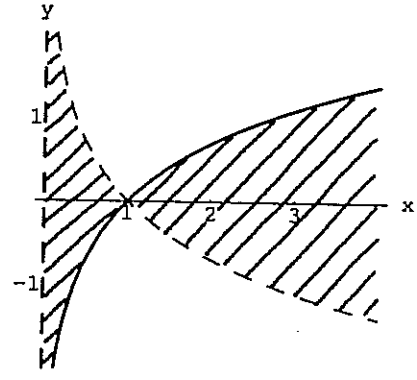
Obr. 5a



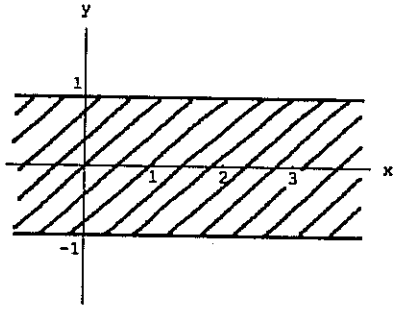
Obr. 5b



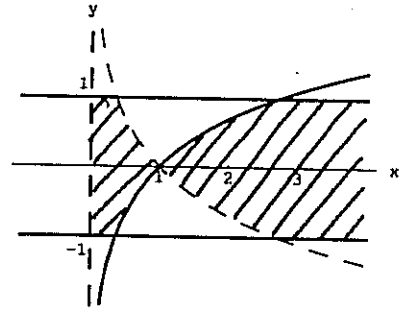
Obr. 5c



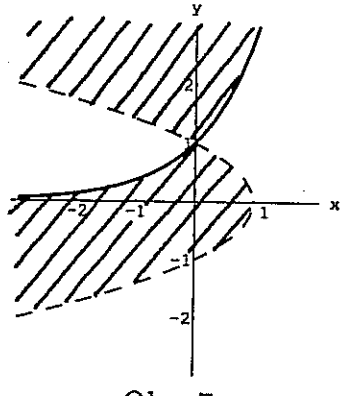
Obr. 6a



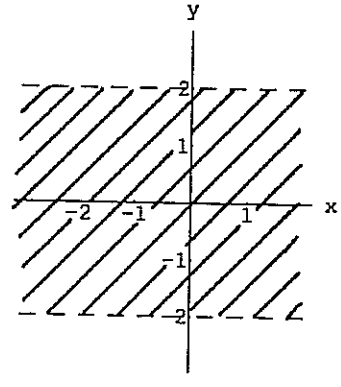
Obr. 6b



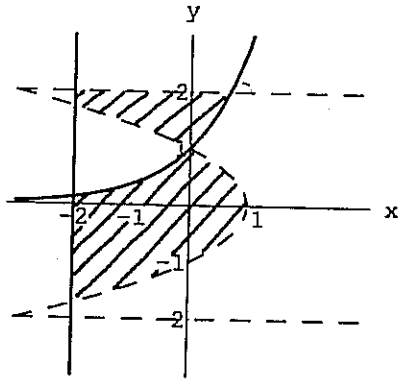
Obr. 6c



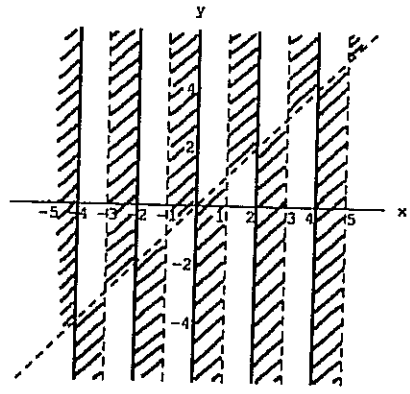
Obr. 7a



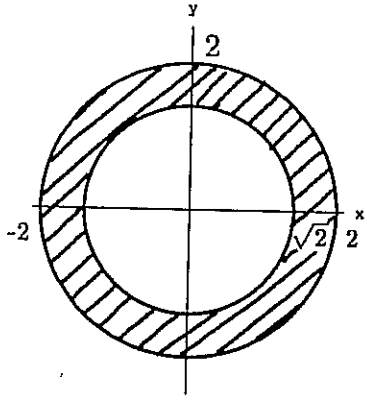
Obr. 7b



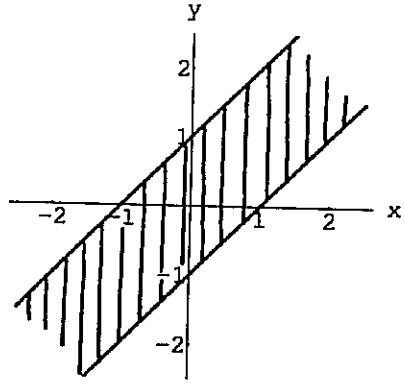
Obr. 7c



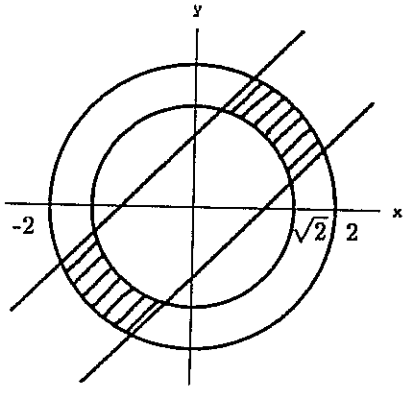
Obr. 8



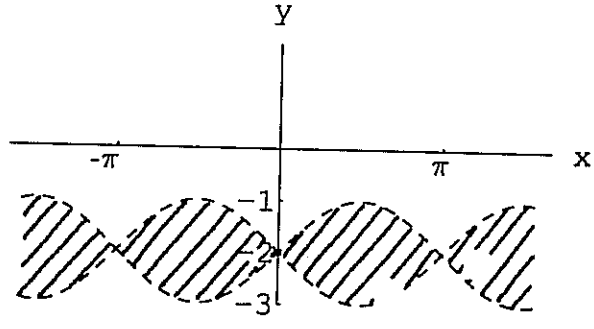
Obr. 9a



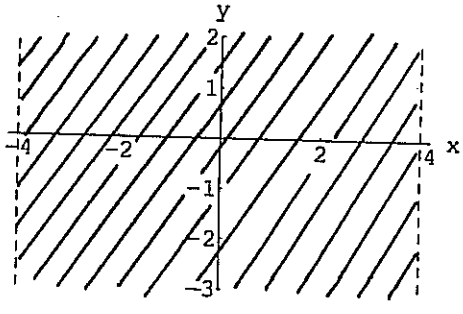
Obr. 9b



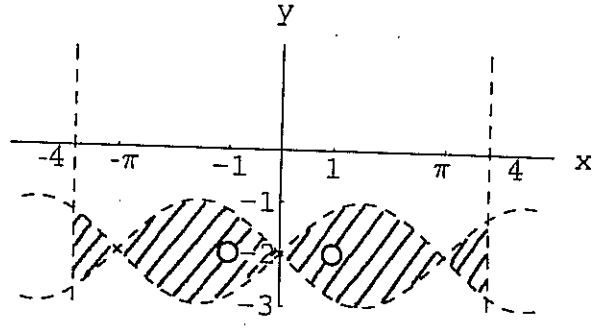
Obr. 9c



Obr. 10a



Obr. 10b



Obr. 10c

199 řešených příkladů z Matematiky I

INVERZNÍ FUNKCE

Příklad 1. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f:\ y=\frac{2+x}{1+x}$. Určete také definiční obor inverzní funkce $D(f^{-1})$ a obor funkčních hodnot inverzní funkce $H(f^{-1})$.

Řešení. Definičním oborem funkce f je množina $\mathbf{R}\setminus\{-1\}$. Z předpisu $y=\frac{2+x}{1+x}$ vyjádříme x ekvivalentními úpravami: $y\,(1+x)=2+x$, z toho $xy-x=2-y$. Vytkneme x a máme $x\,(y-1)=2-y$ a z toho $x=\frac{2-y}{y-1}$. Jelikož jsme x vyjádřili jednoznačně, je také inverzní funkce jednoznačně vyjádřena předpisem $f^{-1}:\ x=\frac{2-y}{y-1}$. Můžeme provést záměnu proměnných, abychom dostali obvyklé značení x pro nezávisle a y pro závisle proměnnou. Pak $f^{-1}:\ y=\frac{2-x}{x-1}$. Definičním oborem inverzní funkce je množina $\mathbf{R}\setminus\{1\}$. Platí tedy, že je $H(f^{-1})=D(f)=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$ a $D(f^{-1})=H(f)=\mathbf{R}\setminus\{1\}$.

Příklad 2. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f:\ y=x^2-6x+9$ na intervalu $x\in(-\infty,3\rangle$. Určete také $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Grafem funkce f na daném intervalu je polovina paraboly s vrcholem v bodě $V=[3,0]$. Je to funkce prostá, takže existuje jednoznačně určená inverzní funkce. Funkční předpis můžeme upravit na tvar $y=(x-3)^2$, z toho $\pm\sqrt{y}=x-3$. Protože $x\in(-\infty,3\rangle$, platí pro výraz na pravé straně $x-3\le 0$, tedy i na levé straně této rovnosti musí být výraz nekladný, tedy $-\sqrt{y}=x-3$ a po jednoduché úpravě $x=3-\sqrt{y}$. Inverzní funkce je dána předpisem (po záměně x a y) $f^{-1}:\ y=3-\sqrt{x}$. Je $D(f^{-1})=H(f)=$ $=\langle 0,\infty)$ a $H(f^{-1})=D(f)=(-\infty,3\rangle$.

Příklad 3. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f:\ y=3x^2-6x+5$ na intervalu $x\in\langle 1,\infty)$. Určete také $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Grafem funkce f na daném intervalu je polovina paraboly s vrcholem v bodě $V=[1,2]$. Je to funkce prostá, takže existuje jednoznačně určená inverzní funkce. Vyjádřeme nyní x z rovnice $y=3x^2-6x+5$. Řešme například tak, že z kvadratické rovnice $3x^2-6x+5-y=0$ vyjádříme podle známého vzorce $x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot 3\cdot(5-y)}}{6}=$ $=1\pm\frac{\sqrt{12y-24}}{6}=1\pm\frac{2\sqrt{3y-6}}{6}=1\pm\frac{1}{3}\sqrt{3y-6}$. Nyní se musíme rozhodnout, který ze získaných výrazů je předpisem inverzní funkce k zadané funkci na daném intervalu. Jelikož je výraz $\frac{1}{3}\sqrt{3y-6}$ pro všechna reálná y nezáporný, je výraz $1+\frac{1}{3}\sqrt{3y-6}$ vždy větší nebo roven jedné, resp. výraz $1-\frac{1}{3}\sqrt{3y-6}$ vždy menší nebo roven jedné. Vzhledem k zadání $x\in\langle 1,\infty)$, je hledanou inverzní funkcí $x=1+\frac{1}{3}\sqrt{3y-6}$. Musí platit $3y-6\ge 0$, tedy $y\ge 2$. Inverzní funkce je dána předpisem (po záměně x a y) $f^{-1}:\ y=1+\frac{1}{3}\sqrt{3x-6}$. $D(f^{-1})=H(f)=\langle 2,\infty)$ a $H(f^{-1})=D(f)=\langle 1,\infty)$.

Příklad 4. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f:\ y=\arcsin(x-3)$. Určete také $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Funkce arkussinus je definovaná na intervalu $\langle -1,1\rangle$, proto $-1\le x-3\le 1$, tedy $2\le x\le 4$, $D(f)=\langle 2,4\rangle=H(f^{-1})$. Z funkčního předpisu vyjádříme $\sin y=x-3$, tedy $x=3+\sin y$. Po záměně x a y je $f^{-1}:\ y=3+\sin x$. Zbývá určit $H(f)$: $f(2)=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$, $f(4)=\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$. Funkce f je prostá a spojitá, tedy $H(f)=D(f^{-1})=\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$.

Příklad 5. Na vhodném intervalu nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f:\ y = 3\sin(x-\pi)+4$ a také určete $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Funkce sinus je periodická, není prostá. Vybereme proto nějaký interval, na kterém je tato funkce prostá, a tedy na kterém bude inverzní funkce jednoznačně určena. Takovým intervalem je např. $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Pro naši funkci tedy platí $-\frac{\pi}{2} \le x-\pi \le \frac{\pi}{2}$ a z toho $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$. Takže $D(f) = H(f^{-1}) = \langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$. Protože je funkce f na tomto intervalu spojitá a prostá, můžeme určit $H(f)$ takto: $f(\frac{\pi}{2}) = 3\sin(-\frac{\pi}{2})+4 = -3+4 = 1$ a dále $f(\frac{3\pi}{2}) = 3\sin(\frac{\pi}{2})+4 = 3+4 = 7$, je tedy $H(f) = D(f^{-1}) = \langle 1, 7\rangle$. A nyní určíme inverzní funkci. Ekvivalentními úpravami rovnice $y = 3\sin(x-\pi)+4$ dostaneme $\frac{y-4}{3} = \sin(x-\pi)$ a dále $\arcsin\frac{y-4}{3} = x-\pi$. Inverzní funkce je tedy dána předpisem $f^{-1}:$ $x = \pi + \arcsin\frac{y-4}{3}$, nebo po záměně proměnných $y = \pi + \arcsin\frac{x-4}{3}$. Poznamenejme, že k $D(f^{-1})$ bylo možno též dospět řešením podmínky $-1 \le \frac{x-4}{3} \le 1$, která vyplývá z nalezeného předpisu inverzní funkce.

Příklad 6. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f:\ y = \frac{\log x+5}{\log x-3}$ spolu s $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Pro danou funkci platí, že $x > 0$ a $\log x \ne 3$, takže $x \ne 1000$. To znamená, že $D(f) = H(f^{-1}) = (0, 1000) \cup (1000, \infty)$. Nyní z funkčního předpisu $y = \frac{\log x+5}{\log x-3}$ nejprve vyjádříme $\log x$. Dostaneme $y\log x - 3y = \log x + 5$, z toho $(y-1)\log x = 3y+5$ a $\log x = \frac{3y+5}{y-1}$. Z tohoto již vyjádříme $x = 10^{\frac{3y+5}{y-1}}$. Z funkčního předpisu je vidět, že $y \ne 1$ a tedy $H(f) = D(f^{-1}) = \mathbf{R}\setminus\{1\}$. Po záměně proměnných dostaneme $f^{-1}:\ y = 10^{\frac{3x+5}{x-1}}$.

Příklad 7. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f:\ y = \frac{e^{2x}-3}{8-2e^{2x}}$ spolu s $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Nejprve vyjádříme e^{2x} z funkčního předpisu. Postupně dostáváme $8y - 2y\,e^{2x} = e^{2x}-3$, $e^{2x}(1+2y) = 8y+3$ a z toho $e^{2x} = \frac{8y+3}{2y+1}$. Potom $x = \frac{1}{2}\ln\frac{8y+3}{2y+1}$. Inverzní funkce v obvyklém tvaru je $f^{-1}:\ y = \frac{1}{2}\ln\frac{8x+3}{2x+1}$. Určíme $D(f)$: $8-2e^{2x} \ne 0$, $e^{2x} \ne 4$, z toho $2x \ne \ln 4$, tedy $2x \ne 2\ln 2$, tj. $x \ne \ln 2$, takže $D(f) = H(f^{-1}) = \mathbf{R}\setminus\{\ln 2\}$. Nyní určíme $D(f^{-1})$. Musí platit $\frac{8y+3}{2y+1} > 0$. Řešení této nerovnice je $D(f^{-1}) = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{3}{8}, \infty)$.

Příklad 8. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f:\ y = \frac{\ln x^3}{1-\ln x}$. Určete též $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Pro danou funkci musí platit $x > 0$ a $1-\ln x \ne 0$, to jest $\ln x \ne 1$, z toho plyne $x \ne e$, takže $D(f) = H(f^{-1}) = (0, e) \cup (e, \infty)$. Daný funkční předpis upravíme na tvar $y - y\ln x = 3\ln x$, z toho $y = (3+y)\ln x$, dále $\frac{y}{3+y} = \ln x$. Inverzní funkce má tedy předpis $x = e^{\frac{y}{3+y}}$, po záměně proměnných $f^{-1}:\ y = e^{\frac{x}{3+x}}$. Tato inverzní funkce je definovaná pro $x \ne -3$, tedy $D(f^{-1}) = \mathbf{R}\setminus\{-3\}$.

Příklad 9. Na vhodném intervalu nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f:\ y = \frac{2-\cos\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}$. Určete též $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Funkce kosinus je prostá například na intervalu $\langle 0, \pi\rangle$, zadaná funkce je prostá pro $0 \le \frac{x}{2} \le \pi$ a $\cos\frac{x}{2} \ne -1$, tedy $0 \le x \le 2\pi$ a $\frac{x}{2} \ne \pi$. Platí tedy $D(f) = H(f^{-1}) =$

$= \langle 0, 2\pi)$. Nyní určeme funkční předpis inverzní funkce: $y + y\cos\frac{x}{2} = 2 - \cos\frac{x}{2}$, dále $\cos\frac{x}{2} = \frac{2-y}{1+y}$, a tedy $x = 2\arccos\frac{2-y}{1+y}$, po záměně proměnných tedy dostáváme $f^{-1} : y = 2\arccos\frac{2-x}{1+x}$. Zbývá určit $D(f^{-1})$, a to buď řešením podmínky $-1 \leq \frac{2-x}{1+x} \leq 1$, nebo určením $f(0) = \frac{1}{2}$ a $\lim\limits_{x\to 2\pi^-} f(x) = \frac{3}{0^+} = \infty$. Je $D(f^{-1}) = H(f) = \langle \frac{1}{2}, \infty)$.

Příklad 10. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f : \ y = \sqrt{2x+1}$. Určete také $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Definiční obor funkce získáme řešením podmínky $2x + 1 \geq 0$, je tedy $x \geq -\frac{1}{2}$. Je $D(f) = \langle -\frac{1}{2}, \infty) = H(f^{-1})$. Umocněním rovnice $y = \sqrt{2x+1}$ dostaneme $y^2 = 2x + 1$ a podmínku $y \geq 0$ (obě strany rovnice byly před umocněním nezáporné, a proto je umocnění ekvivalentní úpravou). Po úpravě je $x = \frac{y^2-1}{2}$, tedy $f^{-1} : \ y = \frac{x^2-1}{2}$, a je $H(f) = D(f^{-1}) = \langle 0, \infty)$.

Příklad 11. Nalezněte předpis funkce inverzní k funkci $f : \ y = \pi + \arccos\sqrt{3x-1}$ a také určete $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Určeme nejprve definiční obor zadané funkce. Musí platit $3x - 1 \geq 0$, a protože funkce arkuskosinus je definována na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, také $-1 \leq \sqrt{3x-1} \leq 1$. Druhá odmocnina je v oboru reálných čísel vždy nezáporná, řešením nerovnice $-1 \leq \sqrt{3x-1}$ jsou tedy všechna $x \in \mathbf{R}$. Nerovnici $\sqrt{3x-1} \leq 1$ umocníme a dostaneme nerovnici $0 \leq 3x - 1 \leq 1$. Po přičtení čísla 1 a vynásobení všech výrazů číslem $\frac{1}{3}$ dostaneme $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$. Tedy $D(f) = H(f^{-1}) = \langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\rangle$. Vyjádřeme nyní funkční předpis inverzní funkce. Úpravami dostáváme $y - \pi = \arccos\sqrt{3x-1}$, dále $\cos(y-\pi) = \sqrt{3x-1}$ a podmínku $0 \leq y - \pi \leq \pi$. Po umocnění obou stran rovnice dostaneme $\cos^2(y-\pi) = 3x-1$ a podmínku $\cos(y-\pi) \geq 0$. Je tedy $x = \frac{1}{3}\cos^2(y-\pi) + \frac{1}{3}$. Po záměně proměnných dostaneme $f^{-1} : \ y = \frac{1}{3}\cos^2(x-\pi) + \frac{1}{3}$. Omezující podmínky dávají $0 \leq y - \pi \leq \frac{\pi}{2}$, tedy $\pi \leq y \leq \frac{3}{2}\pi$. Bylo též možno využít toho, že funkce f je prostá, a určit $H(f)$ takto: $f(\frac{1}{3}) = \pi + \arccos\sqrt{1-1} = \pi + \arccos 0 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$ a dále $f(\frac{2}{3}) = \pi + \arccos\sqrt{2-1} = \pi + \arccos 1 = \pi + 0 = \pi$. Tedy $H(f) = D(f^{-1}) = \langle \pi, \frac{3}{2}\pi\rangle$.

Příklad 12. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f : \ y = \sqrt{1 - \log\frac{x+2}{4}}$. Určete také $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Musí platit $1 - \log\frac{x+2}{4} \geq 0$ a $\frac{x+2}{4} > 0$. Úpravou první podmínky je $\log\frac{x+2}{4} \leq 1$, tedy $\frac{x+2}{4} \leq 10$. Řešíme nerovnici $0 < \frac{x+2}{4} \leq 10$, máme $0 < x+2 \leq 40$, tedy $-2 < x \leq 38$. Je $D(f) = H(f^{-1}) = (-2, 38\rangle$. V rovnici $y = \sqrt{1 - \log\frac{x+2}{4}}$ je pravá strana nezáporná, je tedy i $y \geq 0$. Potom je umocnění rovnice ekvivalentní úprava a je $y^2 = 1 - \log\frac{x+2}{4}$, dále $\log\frac{x+2}{4} = 1 - y^2$, $\frac{x+2}{4} = 10^{1-y^2}$ a $x = -2 + 4 \cdot 10^{1-y^2}$. Po záměně x a y je $f^{-1} : \ y = -2 + 4 \cdot 10^{1-x^2}$. Zbývá určit $H(f)$, jedinou podmínkou je $y \geq 0$, tedy je $H(f) = D(f^{-1}) = \langle 0, \infty)$.

Příklad 13. Nalezněte předpis funkce inverzní k funkci $f : \ y = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$. Určete též $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Musí platit $x - 1 \geq 0$, tedy $D(f) = H(f^{-1}) = \langle 1, \infty)$. Úpravami funkčního předpisu postupně dostáváme: $y - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$, $\operatorname{tg}(y - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{x-1}$. Po umocnění

dostáváme $x-1 = \operatorname{tg}^2(y-\frac{\pi}{2})$. Funkční předpis pro f^{-1} je $x = 1+\operatorname{tg}^2(y-\frac{\pi}{2}) = 1+\operatorname{cotg}^2 y$, po záměně proměnných f^{-1}: $y = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$. Protože je $f(1) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2}$ a $\lim\limits_{x\to\infty} (\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, je $H(f) = D(f^{-1}) = \langle\frac{\pi}{2}, \pi)$. Poznamenejme, že bylo též možno určit $D(f^{-1})$ řešením podmínek $-\frac{\pi}{2} < y - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ a $\operatorname{tg}(y - \frac{\pi}{2}) \geq 0$, jejichž průnikem je podmínka $0 \leq y - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$, tedy $-\frac{\pi}{2} \leq y < \pi$.

Příklad 14. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f: \ y = 2 + 7e^{\sqrt{x-3}}$. Určete též $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Musí platit $x-3 \geq 0$, tedy $D(f) = H(f^{-1}) = \langle 3, \infty)$. Ekvivalentními úpravami postupně dostáváme: $\frac{y-2}{7} = e^{\sqrt{x-3}}$, $\ln\frac{y-2}{7} = \sqrt{x-3}$, po umocnění je $\ln^2\frac{y-2}{7} = x - 3$. Předpis pro f^{-1} je $x = 3+\ln^2\frac{y-2}{7}$, po záměně proměnných f^{-1}: $y = 3+\ln^2\frac{x-2}{7}$. Protože je $f(3) = 2 + 7e^0 = 9$ a $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2 + 7e^{\sqrt{x-3}}\right) = 2 + \infty = \infty$, je $H(f) = D(f^{-1}) = \langle 9, \infty)$. Bylo též možno určit $D(f^{-1})$ řešením podmínek $\frac{y-2}{7} > 0$ a $\ln\frac{y-2}{7} \geq 0$, tedy podmínky $\frac{y-2}{7} \geq 1$.

Příklad 15. Nalezněte předpis funkce inverzní k funkci $f: \ y = 1 - \sqrt{\log_5(6-x)}$. Určete též $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Musí platit $6 - x > 0$ a $\log_5(6-x) \geq 0$, tedy $x < 6$ a $6 - x \geq 1$, průnikem obou podmínek je $x \leq 5$, a tedy $D(f) = H(f^{-1}) = (-\infty, 5\rangle$. Po umocnění rovnice $\sqrt{\log_5(6-x)} = 1 - y$ dostaneme $\log_5(6-x) = (1-y)^2$ a podmínku $1 - y \geq 0$ a dále ekvivalentními úpravami dostáváme $6 - x = 5^{(1-y)^2}$ a $x = 6 - 5^{(1-y)^2}$. Po záměně proměnných $f^{-1}: \ y = 6-5^{(1-x)^2}$. Vzhledem k omezující podmínce platí, že je $D(f^{-1}) = H(f) = (-\infty, 1\rangle$. Krajní body $D(f^{-1})$ lze určit i výpočtem hodnot $f(5)$ a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Příklad 16. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f: \ y = \arccos\frac{1}{x}$. Určete také $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Musí platit $x \neq 0$ a $-1 \leq \frac{1}{x} \leq 1$. Nerovnice $-1 \leq \frac{1}{x}$ a $\frac{1}{x} \leq 1$ vyřešíme např. metodou nulových bodů, je tedy $0 \leq \frac{1+x}{x}$ a zároveň $\frac{1-x}{x} \leq 0$. Průnikem řešení podmínek je $D(f) = (-\infty, -1\rangle \cup \langle 1, \infty) = H(f^{-1})$. Z funkčního předpisu funkce vyjádříme ekvivalentními úpravami proměnnou x, tedy je $\cos y = \frac{1}{x}$ a $f^{-1}: \ x = \frac{1}{\cos y}$, po záměně proměnných $f^{-1}: \ y = \frac{1}{\cos x}$. Řešením podmínek $y \in \langle 0, \pi\rangle$ a $\cos y \neq 0$ je $H(f) = D(f^{-1}): \ y \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi\rangle$.

Příklad 17. Nalezněte funkční předpis funkce inverzní k funkci $f: \ y = \frac{3^x-3^{-x}}{2}$. Určete také $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$.

Řešení. Definičním oborem funkce f jsou všechna reálná čísla, $D(f) = H(f^{-1}) = \mathbf{R}$. Funkční předpis inverzní funkce získáme vhodnými úpravami rovnice $y = \frac{3^x-3^{-x}}{2}$. Je $2y = 3^x - \frac{1}{3^x}$, tedy $2y \cdot 3^x = 3^{2x} - 1$ a $3^{2x} - 2y \cdot 3^x - 1 = 0$. Výraz 3^x vyjádříme z kvadratické rovnice: $3^x_{1,2} = \frac{2y\pm\sqrt{4y^2+4}}{2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$. Výraz 3^x je vždy kladný, proto $3^x = y + \sqrt{y^2+1}$ (výraz $y - \sqrt{y^2+1}$ je pro všechna y záporný). Tedy dostaneme $f^{-1}: \ x = \log_3(y+\sqrt{y^2+1})$, případně $f^{-1}: \ y = \log_3(x+\sqrt{x^2+1})$. Definičním oborem inverzní funkce jsou všechna reálná čísla.

LIMITY FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Příklad 1. Určete $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-x-6}$.

Řešení. Jedná se o limitu typu $\frac{0}{0}$. Kvadratický trojčlen v čitateli i jmenovateli můžeme rozložit. Pro každé $x \neq 3$ platí $\frac{x^2-7x+12}{x^2-x-6} = \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x+2)} = \frac{x-4}{x+2}$. Pak (podle vlastností limit) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-x-6} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{x-4}{x+2} = -\frac{1}{5}$. Jelikož jde o limitu typu $\frac{0}{0}$, můžeme ji též počítat l'Hospitalovým pravidlem: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-7x+12}{x^2-x-6} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{2x-7}{2x-1} = -\frac{1}{5}$.

Příklad 2. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^4-1}$.

Řešení. Jedná se o limitu typu $\frac{0}{0}$. V čitateli vytkneme z prvního a třetího členu x, z druhého a čtvrtého -2 a jmenovatele rozložíme podle vzorce. Pak $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^4-1} =$
$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{x(x^2-1)-2(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^2-1)(x-2)}{(x^2-1)(x^2+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x-2}{x^2+1} = -\frac{1}{2}$.
Lze použít i l'Hospitalovo pravidlo, neboť jde opět o neurčitý výraz typu $\frac{0}{0}$. Dostaneme: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^4-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2-4x-1}{4x^3} = -\frac{1}{2}$.

Příklad 3. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{8-2x}-2}{x^2+2x-8}$.

Řešení. Daný zlomek rozšíříme výrazem $\sqrt{8-2x}+2$, zjednodušíme a vypočteme limitu: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{8-2x}-2}{x^2+2x-8} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(\sqrt{8-2x}-2)(\sqrt{8-2x}+2)}{(x^2+2x-8)(\sqrt{8-2x}+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{8-2x-4}{(x+4)(x-2)(\sqrt{8-2x}+2)} =$
$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{-2(x-2)}{(x+4)(x-2)(\sqrt{8-2x}+2)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{-2}{(x+4)(\sqrt{8-2x}+2)} = \frac{-2}{6\cdot 4} = -\frac{1}{12}$. Jelikož se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$, můžeme také použít l'Hospitalovo pravidlo: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{8-2x}-2}{x^2+2x-8} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\frac{-2}{2\sqrt{8-2x}}}{2x+2} =$
$= \lim\limits_{x\to 2} \frac{-2}{2\sqrt{8-2x}(2x+2)} = \frac{-2}{2\cdot 2\cdot 6} = -\frac{1}{12}$.

Příklad 4. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x-3}\right)$.

Řešení. Jedná se o limitu typu $\infty - \infty$. Převedením zlomků na společného jmenovatele dostaneme limitu typu $\frac{0}{0}$. Limitu pak lze vypočítat přímo:
$\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x-3}\right) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{6-(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{-1}{x+3} = -\frac{1}{6}$.
Také lze (po uvedení na společného jmenovatele a zjednodušení) použít l'Hospitalovo pravidlo: $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x-3}\right) = \lim\limits_{x\to 3} \frac{6-(x+3)}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{6}$.

Příklad 5. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{16+\sin 4x}-4}{3\operatorname{tg}^2 2x+x}$.

Řešení. Jelikož se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$, použijeme k výpočtu l'Hospitalovo pravidlo.
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{16+\sin 4x}-4}{3\operatorname{tg}^2 2x+x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{16+\sin 4x}}\cdot\cos 4x\cdot 4}{6\operatorname{tg} 2x\cdot\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2+1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2\cos 4x}{\sqrt{16+\sin 4x}}}{\frac{12\operatorname{tg} 2x}{\cos^2 2x}+1} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{0}{1}+1} = \frac{1}{2}$.

Příklad 6. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{6x^3-5}-\sqrt{4x-3}}{\ln(3-2x)}$.

Řešení. Jedná se o limitu typu $\frac{0}{0}$, použijeme k výpočtu l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{6x^3-5}-\sqrt{4x-3}}{\ln(3-2x)} = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{18x^2}{2\sqrt{6x^3-5}}-\frac{4}{2\sqrt{4x-3}}}{\frac{1}{3-2x}\cdot(-2)} = \frac{\frac{9}{1}-\frac{2}{1}}{\frac{-2}{1}} = -\frac{7}{2}.$$

Příklad 7. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2e^{(2x-\frac{\pi}{2})}-4x+\pi-2}{3\cos^2 2x}$.

Řešení. Opět se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$. Po prvním použití l'Hospitalova pravidla dostaneme opět limitu typu $\frac{0}{0}$, musíme tedy tuto metodu použít ještě jednou.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{2e^{(2x-\frac{\pi}{2})}-4x+\pi-2}{3\cos^2 2x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4e^{(2x-\frac{\pi}{2})}-4}{-6\cos 2x\cdot\sin 2x\cdot 2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{4e^{(2x-\frac{\pi}{2})}-4}{-6\sin 4x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{8e^{(2x-\frac{\pi}{2})}}{-6\cos 4x\cdot 4} = \frac{1}{3}.$$

Příklad 8. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to 0+} x^3\cdot\ln x$.

Řešení. Neurčitý výraz typu $0\cdot(-\infty)$ převedeme na výraz typu $\frac{-\infty}{\infty}$ a použijeme k výpočtu l'Hospitalovo pravidlo takto: $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^3}} = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim\limits_{x\to 0+}\frac{x^3}{-3} = 0.$

Příklad 9. Určete $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

Řešení. Jde o limitu typu ∞^0. Nejprve upravíme na vhodnější tvar. Platí $(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi} = e^{(2x-\pi)\cdot\ln(\operatorname{tg} x)}$. Vypočteme $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}(2x-\pi)\cdot\ln(\operatorname{tg} x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\ln(\operatorname{tg} x)}{\frac{1}{2x-\pi}}$. Toto je limita typu $\frac{\infty}{-\infty}$ a můžeme použít k výpočtu l'Hospitalovo pravidlo. Dostaneme $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{2}{(2x-\pi)^2}} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{-(2x-\pi)^2}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{-(2x-\pi)^2}{\sin 2x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}\frac{-4(2x-\pi)}{2\cos 2x} = 0.$$

Potom $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}e^{(2x-\pi)\cdot\ln(\operatorname{tg} x)} = e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-}(2x-\pi)\cdot\ln(\operatorname{tg} x)} = e^0 = 1.$

Příklad 10. Určete $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1}$.

Řešení. Tuto limitu můžeme opět řešit dvojím způsobem. Buď čitatele i jmenovatele vydělíme nejvyšší mocninou x ve jmenovateli a dostaneme $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{3-\frac{1}{x}}$. Jelikož je $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$, je výše počítaná limita rovna $\frac{2}{3}$. Nebo můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo a dostaneme rovnou $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3x-1} = \frac{2}{3}$.

Příklad 11. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+\sqrt{x^6+x}}{2x^3+4x^2+5}$.

Řešení. Čitatele i jmenovatele vydělíme nejvyšší mocninou x ve jmenovateli (tedy x^3) a dostaneme: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x+\sqrt{x^6+x}}{2x^3+4x^2+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{\sqrt{x^6+x}}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\sqrt{\frac{x^6+x}{x^6}}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{5}{x^3}} =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x^2}+\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}}{2+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^3}} = \frac{4}{2} = 2.$$

Příklad 12. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+5}-\frac{x^2}{x-4}\right)$.

Řešení. Tento neurčitý výraz opět převedeme na příznivější tvar sečtením zlomků a dostaneme $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+5}-\frac{x^2}{x-4}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3-4x^2-x^3-5x^2}{(x+5)(x-4)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9x^2}{x^2+x-20}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9}{1+\frac{1}{x}-\frac{20}{x^2}}=$ $=-9$. Nebo užitím l'Hospitalova pravidla dostáváme $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-9x^2}{x^2+x-20}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-18x}{2x+1}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-18}{2}=-9$.

Příklad 13. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

Řešení. Daný výraz rozšíříme výrazem $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})$ a pak $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}\,(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}(x+1-x)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$. Opět vydělíme čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou x ve jmenovateli (tj. v našem případě $\sqrt{x}$), tím dostaneme $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$.

Příklad 14. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$.

Řešení. Opět vydělíme čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninou x ze jmenovatele, tedy dělíme x. Pak $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+3x}}{x}}{\frac{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+3x}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{x^3-2x^2}{x^3}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x}}}{\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}}}=1$.

Příklad 15. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^x$.

Řešení. Výraz $\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^x$ převedeme na tvar $e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x+3}\right)}$. Pak spočítáme limitu exponentu. Nejprve převedeme na vhodný neurčitý výraz a pak použijeme l'Hospitalovo pravidlo a dostaneme $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x+3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x+3}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x+3}}\left(-\frac{2}{(x+3)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\frac{x+3+2}{x+3}}\cdot\frac{2}{(x+3)^2}}{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+5}\cdot\frac{2}{(x+3)^2}\cdot x^2\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(x+5)(x+3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+8x+15}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{8}{x}+\frac{15}{x^2}}=2$. Potom $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{2}{x+3}\right)}=e^2$.

Příklad 16. Vypočtěte $\lim\limits_{x\to0+}\arcsin x\cdot\operatorname{cotg}x$.

Řešení. Jedná se o limitu typu $0\cdot\infty$. Abychom mohli použít l'Hospitalovo pravidlo, musíme nejprve upravit na typ, který splňuje podmínky l'Hospitalovy věty. Víme, že $\operatorname{cotg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, takže budeme počítat $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\arcsin x}{\operatorname{tg}x}$. To je typ $\frac{0}{0}$ a můžeme již l'Hospitalovo pravidlo použít: $\lim\limits_{x\to0+}\arcsin x\cdot\operatorname{cotg}x=\lim\limits_{x\to0+}\frac{\arcsin x}{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to0+}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2x}}=\lim\limits_{x\to0+}\frac{\cos^2x}{\sqrt{1-x^2}}=1$.

Příklad 17. Určete limity v krajních bodech definičního oboru funkce $f(x)=\frac{x^2+2x-8}{2^x-4}$.

Řešení. Definičním oborem funkce $f(x)$ je množina $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-8}{2^x-4}=-\infty$, protože je $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+2x-8)=\infty$ a $\lim\limits_{x\to-\infty}(2^x-4)=-4$.
$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2+2x-8}{2^x-4}=\lim\limits_{x\to2}\frac{2x+2}{2^x\cdot\ln2}=\frac{6}{4\ln2}=\frac{3}{2\ln2}$. Zde se jednalo o limitu typu $\frac{0}{0}$, proto jsme použili l'Hospitalovo pravidlo. Dále $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-8}{2^x-4}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2^x\cdot\ln2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2^x\cdot\ln2\cdot\ln2}=0$. Zde se jednalo o limitu typu $\frac{\infty}{\infty}$ a dvakrát jsme použili l'Hospitalovo pravidlo.

DERIVACE FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Příklad 1. Zderivujte funkci $f(x) = \arcsin x \cdot \arccos x$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Podle vzorce pro derivaci součinu je derivace zadané funkce:
$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \arccos x + \arcsin x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$, po úpravě $f'(x) = \frac{\arccos x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Příklad 2. Zderivujte funkci $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x} - \frac{\sin 3}{\sin 4}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Podle vzorce pro derivaci podílu dostaneme $f'(x) = \frac{\cos x(1+\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$, výraz $\frac{\sin 3}{\sin 4}$ je konstanta a derivace konstanty je rovna nule. Po úpravě dostáváme $f'(x) = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$.

Příklad 3. Zderivujte funkci $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Podle vzorce pro derivaci složené funkce je $f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{x}{3})^2} \cdot \frac{1}{3} + 0$, po úpravě $f'(x) = \frac{1}{\frac{9+x^2}{9}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{9+x^2}$.

Příklad 4. Zderivujte funkci $f(x) = (2+3x^2)^5$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Podle vzorce pro derivaci složené funkce je $f'(x) = 5\,(2+3x^2)^4 \cdot 6x$, po úpravě $f'(x) = 30x\,(2+3x^2)^4$.

Příklad 5. Zderivujte funkci $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} + \frac{1}{2}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Podle známých vzorců a pravidel pro derivování je derivace zadané funkce:
$f'(x) = \frac{2\cos x(-\sin x)(1+\sin^2 x) - \cos^2 x \cdot 2\sin x \cos x}{(1+\sin^2 x)^2} + 0$. Algebraickými úpravami a užitím goniometrických vzorců dostáváme $f'(x) = \frac{-2\sin x \cos x(1+\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin^2 x)^2} = \frac{-\sin 2x(1+1)}{(1+\sin^2 x)^2} = \frac{-2\sin 2x}{(1+\sin^2 x)^2}$.

Příklad 6. Zderivujte funkci $f(x) = x \arcsin \frac{1}{x} + \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Je $f'(x) = 1 \cdot \arcsin \frac{1}{x} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x\right)$.
Po algebraické úpravě dostáváme: $f'(x) = \arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{x \cdot \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{x\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$. S přihlédnutím k faktu, že definičním oborem funkce je interval $\langle 1, \infty)$, (výpočet přenecháváme studentům jako samostatnou práci), a tedy $\sqrt{x^2} = |x| = x$, můžeme dále upravovat takto: $f'(x) = \arcsin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \arcsin \frac{1}{x}$.

Příklad 7. Zderivujte funkci $f(x) = \ln \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Je $f'(x) = \frac{1}{\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}} \cdot \frac{2e^{-2x}(1+e^{-2x})-(1-e^{-2x})(-2e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2}$. Algebraickými úpravami postupně dostaneme $f'(x) = \frac{1+e^{-2x}}{1-e^{-2x}} \cdot \frac{2e^{-2x}(1+e^{-2x}+1-e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{4e^{-2x}}{(1-e^{-2x})(1+e^{-2x})} = \frac{4e^{-2x}}{1-e^{-4x}} = \frac{\frac{4}{e^{2x}}}{1-\frac{1}{e^{4x}}} = \frac{4e^{2x}}{e^{4x}-1}$.

Příklad 8. Zderivujte funkci $f(x) = \arcsin\sqrt{1-4x} + 2x\sqrt{x-4x^2} + \sqrt{2}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Je $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-4x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-4x}} \cdot (-4) + 2\sqrt{x-4x^2} + 2x\,\frac{1}{2\sqrt{x-4x^2}}(1-8x) + 0$. Algebraickými úpravami postupně dostaneme $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{4x}\sqrt{1-4x}} + 2\sqrt{x-4x^2} + \frac{x-8x^2}{\sqrt{x-4x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{x-4x^2}} + \frac{2(x-4x^2)}{\sqrt{x-4x^2}} + \frac{x-8x^2}{\sqrt{x-4x^2}} = \frac{-1+2x-8x^2+x-8x^2}{\sqrt{x-4x^2}} = \frac{3x-1-16x^2}{\sqrt{x-4x^2}}$.

Příklad 9. Zderivujte funkci $f(x) = 2x - (1-x^2) \cdot \ln\frac{1+x}{1-x}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Je $f'(x) = 2 - \left((-2x) \cdot \ln\frac{1+x}{1-x} + (1-x^2) \cdot \frac{1}{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\right)$ a z toho dále po zjednodušení $f'(x) = 2 + 2x \cdot \ln\frac{1+x}{1-x} - (1+x)(1-x) \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = 2 + 2x \cdot \ln\frac{1+x}{1-x} - 2 = 2x \cdot \ln\frac{1+x}{1-x}$.

Příklad 10. Zderivujte funkci $f(x) = \sqrt{4x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1} + \operatorname{tg}(1-\frac{\pi}{2})$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Je $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x-1}} \cdot 4 - \frac{1}{1+(\sqrt{4x-1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x-1}} \cdot 4 + 0$. Algebraickými úpravami dostaneme $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x-1}} - \frac{1}{1+4x-1} \cdot \frac{2}{\sqrt{4x-1}} = \frac{2}{\sqrt{4x-1}}\left(1-\frac{1}{4x}\right) = \frac{4x-1}{2x\cdot\sqrt{4x-1}} = \frac{\sqrt{4x-1}}{2x}$.

Příklad 11. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \ln\left(\ln x + \sqrt{4+\ln^2 x}\right) + \ln 4$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Je $f'(x) = \frac{1}{\ln x+\sqrt{4+\ln^2 x}} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2\cdot\sqrt{4+\ln^2 x}} \cdot 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\right) + 0$. Algebraickými úpravami postupně dostáváme $f'(x) = \frac{1}{\ln x+\sqrt{4+\ln^2 x}} \cdot \frac{\sqrt{4+\ln^2 x}+\ln x}{x\cdot\sqrt{4+\ln^2 x}} = \frac{1}{x\cdot\sqrt{4+\ln^2 x}}$.

Příklad 12. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = 2\operatorname{arctg}\frac{3-x^5}{3+x^5} + \ln\frac{3-x^5}{3+x^5}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Je $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{3-x^5}{3+x^5}\right)^2} \cdot \frac{-5x^4(3+x^5)-(3-x^5)5x^4}{(3+x^5)^2} + \frac{1}{\frac{3-x^5}{3+x^5}} \cdot \frac{-5x^4(3+x^5)-(3-x^5)5x^4}{(3+x^5)^2}$.
Algebraickými úpravami postupně dostáváme:
$f'(x) = \frac{2}{1+\frac{(3-x^5)^2}{(3+x^5)^2}} \cdot \frac{-5x^4(3+x^5+3-x^5)}{(3+x^5)^2} + \frac{3+x^5}{3-x^5} \cdot \frac{-5x^4(3+x^5+3-x^5)}{(3+x^5)^2} = \frac{2}{\frac{(3+x^5)^2+(3-x^5)^2}{(3+x^5)^2}} \cdot \frac{-5x^4\cdot 6}{(3+x^5)^2} + \frac{-5x^4\cdot 6}{(3-x^5)(3+x^5)} = \frac{2\cdot(-30x^4)}{(3+x^5)^2+(3-x^5)^2} + \frac{-30x^4}{(3-x^5)(3+x^5)} = \frac{-60x^4}{9+6x^5+x^{10}+9-6x^5+x^{10}} + \frac{-30x^4}{9-x^{10}} = \frac{-60x^4}{2(9+x^{10})} + \frac{-30x^4}{9-x^{10}} = \frac{-30x^4(9-x^{10})-30x^4(9+x^{10})}{(9+x^{10})(9-x^{10})} = \frac{-30x^4\cdot 18}{81-x^{20}} = \frac{540x^4}{x^{20}-81}$.

Příklad 13. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \ln\sqrt{\frac{2-\sin x}{2+\sin x}} + \operatorname{arctg}\frac{2-\sin x}{2+\sin x}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Podle pravidel pro počítání s logaritmy platí: $\ln\sqrt{\frac{2-\sin x}{2+\sin x}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2-\sin x}{2+\sin x}$. Tato úprava zjednoduší následující derivování (srovnejte s derivací původního výrazu). Je tedy $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{2-\sin x}{2+\sin x}} \cdot \frac{-\cos x(2+\sin x)-(2-\sin x)\cos x}{(2+\sin x)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2-\sin x}{2+\sin x}\right)^2} \cdot \frac{-\cos x(2+\sin x)-(2-\sin x)\cos x}{(2+\sin x)^2}$.
Algebraickými úpravami postupně dostáváme:
$f'(x) = \frac{2+\sin x}{2(2-\sin x)} \cdot \frac{-\cos x(2+\sin x+2-\sin x)}{(2+\sin x)^2} + \frac{1}{\frac{(2+\sin x)^2+(2-\sin x)^2}{(2+\sin x)^2}} \cdot \frac{-\cos x(2+\sin x+2-\sin x)}{(2+\sin x)^2} =$
$= \frac{-4\cos x}{2(2-\sin x)(2+\sin x)} + \frac{-4\cos x}{4+4\sin x+\sin^2 x+4-4\sin x+\sin^2 x} = \frac{-2\cos x}{4-\sin^2 x} + \frac{-2\cos x}{4+\sin^2 x} =$
$= \frac{-2\cos x(4+\sin^2 x)-2\cos x(4-\sin^2 x)}{(4-\sin^2 x)(4+\sin^2 x)} = \frac{-16\cos x}{16-\sin^4 x} = \frac{16\cos x}{\sin^4 x-16}$.

Příklad 14. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \sqrt{x-x^2} + (2x-1)\arcsin\sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{5}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.
Řešení. Je $f'(x) = \frac{1}{2\cdot\sqrt{x-x^2}} \cdot (1-2x) + 2\cdot\arcsin\sqrt{x} + (2x-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0$.
Algebraickými úpravami postupně dostáváme: $f'(x) = \frac{1-2x}{2\cdot\sqrt{x-x^2}} + 2\cdot\arcsin\sqrt{x} + \frac{2x-1}{2\cdot\sqrt{x-x^2}} =$
$= \frac{1-2x+2x-1}{2\cdot\sqrt{x-x^2}} + 2\cdot\arcsin\sqrt{x} = 2\arcsin\sqrt{x}$.

Příklad 15. Nalezněte derivaci funkce $f(x) = \frac{x}{2}\cdot\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \arcsin\frac{1}{3}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.
Řešení. Je $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{9-x^2} + \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{9-x^2}}\cdot(-2x) + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{3})^2}}\cdot\frac{1}{3} + 0$.
Algebraickými úpravami postupně dostáváme: $f'(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{2} + \frac{-x^2}{2\cdot\sqrt{9-x^2}} + \frac{9}{2\sqrt{9-x^2}} =$
$= \frac{9-x^2-x^2+9}{2\sqrt{9-x^2}} = \frac{2(9-x^2)}{2\sqrt{9-x^2}} = \sqrt{9-x^2}$.

Příklad 16. Vypočtěte druhou derivaci funkce $f(x) = x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.
Řešení. Nejprve spočítáme první derivaci dané funkce:
$f'(x) = 2x - \left(\sqrt{x^2-1} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right) + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x\right)$.
Po úpravě $f'(x) = 2x - \frac{x^2-1+x^2}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} = 2x - \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} =$
$= 2x - \frac{2x^2-2}{\sqrt{x^2-1}} = 2x - 2\sqrt{x^2-1}$.
Nyní výsledek ještě jednou zderivujeme a dostaneme druhou derivaci:
$f''(x) = 2 - 2\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot 2x = 2 - \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Příklad 17. Zderivujte funkci $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.
Řešení. Funkci nejprve upravíme na tvar vhodný pro derivování $f(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\ln x^{\sqrt{x}}} = e^{\sqrt{x}\cdot\ln x}$. Derivace funkce potom je $f'(x) = e^{\sqrt{x}\cdot\ln x}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}\right)$, po úpravě $f'(x) = x^{\sqrt{x}}\cdot\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$.

Příklad 18. Zderivujte funkci $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.
Řešení. Funkci nejprve upravíme na tvar vhodný pro derivování $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x = e^{x\cdot\ln\frac{x}{x+1}}$. Derivace funkce potom je $f'(x) = e^{x\cdot\ln\frac{x}{x+1}}\cdot\left(\ln\frac{x}{x+1} + x\cdot\frac{x+1}{x}\cdot\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\right)$, po úpravě $f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x\cdot\left(\ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)$.

Příklad 19. Zderivujte funkci $f(x) = \sqrt[x]{(x+1)^2}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Funkci nejprve upravíme na tvar vhodný pro derivování $f(x) = \sqrt[x]{(x+1)^2} = (x+1)^{\frac{2}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{2}{x}\cdot\ln(x+1)}$. Derivace funkce je $f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{x}\cdot\ln(x+1)}.\left(-\frac{2}{x^2}\cdot\ln(x+1) + \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x+1}\right)$. Po úpravě dostaneme $f'(x) = \frac{2}{x}\cdot\sqrt[x]{(x+1)^2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x}\right)$.

Příklad 20. Zderivujte funkci $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$ a výsledek co nejvíce zjednodušte.

Řešení. Funkci upravíme na tvar vhodný pro derivování $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln x} = \mathrm{e}$. Derivace funkce je $f'(x) = 0$.

Příklad 21. Určete derivaci funkce $y = f(x)$, která je implicitně zadána rovnicí $y^2 + 2\ln y - x^4 = 0$.

Řešení. Parciální derivace funkce $F(x,y) = y^2 + 2\ln y - x^4$ podle proměnných x a y jsou $\frac{\partial F}{\partial x} = -4x^3$ a $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \frac{2}{y}$. Podle vzorce pro derivaci implicitně zadané funkce je $y' = -\frac{-4x^3}{2y+\frac{2}{y}} = \frac{2x^3y}{y^2+1}$.
Ke stejnému výsledku bychom dospěli, kdybychom obě strany zadané rovnice derivovali podle proměnné x (y není při tomto postupu konstanta, ale funkce proměnné x, proto derivace funkce y je y'). Dostaneme $2yy' + \frac{2}{y}\cdot y' - 4x^3 = 0$, tedy $2y'\left(y + \frac{1}{y}\right) = 4x^3$ a potom $y' = \frac{2x^3y}{y^2+1}$.

Příklad 22. Určete derivaci funkce $y = f(x)$, která je implicitně zadána rovnicí $x\cdot\sin y - \cos y + \cos 2x = 0$.

Řešení. Parciální derivace funkce $F(x,y) = x\cdot\sin y - \cos y + \cos 2x$ podle proměnných x a y jsou $\frac{\partial F}{\partial x} = \sin y - 2\sin 2x$ a $\frac{\partial F}{\partial y} = x\cdot\cos y + \sin y$. Podle vzorce pro derivaci implicitně zadané funkce je $y' = -\frac{\sin y - 2\sin 2x}{x\cdot\cos y + \sin y} = \frac{2\sin 2x - \sin y}{x\cdot\cos y + \sin y}$.
Stejný výsledek dostaneme derivováním obou stran rovnice $x\cdot\sin y - \cos y + \cos 2x = 0$ podle proměnné x (y je funkce proměnné x). Je $\sin y + x\cdot\cos y\cdot y' + \sin y\cdot y' - 2\sin 2x = 0$, tedy $y'(x\cos y + \sin y) = 2\sin 2x - \sin y$ a potom $y' = \frac{2\sin 2x - \sin y}{x\cdot\cos y + \sin y}$. Srovnejte oba postupy.

Příklad 23. Určete první a druhou derivaci funkce $y = f(x)$, která je implicitně zadána rovnicí $\mathrm{e}^y + xy - \mathrm{e} = 0$.

Řešení. První derivaci určíme podle vzorce nebo použijeme následující postup. Nejprve zderivujeme obě strany rovnice podle proměnné x (y není při tomto postupu konstanta, ale funkce proměnné x, proto derivace funkce y je y'). Dostaneme $\mathrm{e}^y\cdot y' + y + xy' = 0$, tedy $y'(\mathrm{e}^y + x) = -y$ a potom $y' = -\frac{y}{\mathrm{e}^y+x}$. Druhou derivaci určíme obdobně, podle proměnné x (y je opět funkce) zderivujeme první derivaci. Je tedy $y'' = \left(-\frac{y}{\mathrm{e}^y+x}\right)' = -\frac{y'(\mathrm{e}^y+x) - y(\mathrm{e}^y\cdot y'+1)}{(\mathrm{e}^y+x)^2} = \frac{y'(y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y - x) + y}{(\mathrm{e}^y+x)^2} = \frac{-\frac{y}{\mathrm{e}^y+x}(y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y - x) + y}{(\mathrm{e}^y+x)^2} = \frac{-y^2\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^y + xy + y\mathrm{e}^y + xy}{(\mathrm{e}^y+x)^3} = \frac{-y^2\mathrm{e}^y + 2xy + 2y\mathrm{e}^y}{(\mathrm{e}^y+x)^3}$.

PARCIÁLNÍ DERIVACE FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

Příklad 1. Určete obě parciální derivace funkce $f(x,y) = \arcsin \frac{y-2x}{2\sqrt{xy-x^2}}$.

Řešení. Nejprve určíme parciální derivaci podle proměnné x (tzn., že y považujeme za konstantu). $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(y-2x)^2}{4(xy-x^2)}}} \cdot \frac{-4\sqrt{xy-x^2}-(y-2x)\frac{y-2x}{\sqrt{xy-x^2}}}{4(xy-x^2)} = \frac{2\sqrt{xy-x^2}}{\sqrt{4xy-4x^2-y^2+4xy-4x^2}} \cdot \frac{-4xy+4x^2-y^2+4xy-4x^2}{4(xy-x^2)\sqrt{xy-x^2}} = \frac{-y^2}{2\sqrt{8xy-8x^2-y^2}(xy-x^2)} = \frac{y^2}{2(x^2-xy)\sqrt{8xy-8x^2-y^2}}$. Stejným způsobem určíme a zjednodušíme parciální derivaci podle proměnné y (konstantou je nyní x): $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(y-2x)^2}{4(xy-x^2)}}} \cdot \frac{2\sqrt{xy-x^2}-(y-2x)\frac{x}{\sqrt{xy-x^2}}}{4(xy-x^2)} = \frac{2\sqrt{xy-x^2}}{\sqrt{4xy-4x^2-y^2+4xy-4x^2}} \cdot \frac{2xy-2x^2-xy+2x^2}{4(xy-x^2)\sqrt{xy-x^2}} = \frac{2xy-2x^2-xy+2x^2}{\sqrt{4xy-4x^2-y^2+4xy-4x^2}\cdot 2(xy-x^2)} = \frac{xy}{2(xy-x^2)\sqrt{8xy-8x^2-y^2}}$.

Příklad 2. Určete obě parciální derivace funkce $f(x,y) = \frac{x^2 \ln x}{x^2+y} - \ln\sqrt{x^2+y}$.

Řešení. Nejprve určíme a upravíme parciální derivaci podle proměnné x. Dostaneme $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2x\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x})(x^2+y)-x^2\ln x\cdot 2x}{(x^2+y)^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}}\cdot 2x = \frac{2x^3\ln x + x^3 + 2xy\ln x + xy - 2x^3\ln x}{(x^2+y)^2} - \frac{x}{x^2+y} = \frac{x^3+2xy\ln x+xy-x^3-xy}{(x^2+y)^2} = \frac{2xy\ln x}{(x^2+y)^2}$. Parciální derivace podle proměnné y je $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2\ln x}{(x^2+y)^2} - \frac{1}{\sqrt{x^2+y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y}} = \frac{-x^2\ln x}{(x^2+y)^2} - \frac{1}{2(x^2+y)} = \frac{-2x^2\ln x - x^2 - y}{2(x^2+y)^2}$.

Příklad 3. Určete obě parciální derivace funkce $f(x,y) = \ln(x+y) + \ln\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

Řešení. Parciální derivace podle proměnné x je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{2x\cdot 2y^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \frac{(x^2+y^2)(x-y)+4xy^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \frac{x^3+5xy^2-x^2y-y^3}{x^4-y^4}$. Parciální derivace podle proměnné y je $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y} + \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{-2y\cdot 2x^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \frac{1}{x+y} + \frac{-4x^2y}{x^4-y^4} = \frac{(x-y)(x^2+y^2)-4x^2y}{x^4-y^4} = \frac{x^3-5x^2y+xy^2-y^3}{x^4-y^4}$.

Příklad 4. Pro funkci $f(x,y) = x^2+y^2-x\sqrt{x^2-y^2} + \ln(x+\sqrt{x^2-y^2})$ určete hodnoty parciálních derivací v bodě A, je-li $A=(5,4)$.

Řešení. Nejprve určíme parciální derivace a pak vypočteme jejich hodnoty v daném bodě. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \left(\sqrt{x^2-y^2} + x\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}}\right) + \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}}}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = 2x - \sqrt{x^2-y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$. Na jednodušší tvar už nemusíme upravovat, ale rovnou dosadíme souřadnice bodu A. Pak $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 10 - 3 - \frac{25}{3} + \frac{1}{3} = -1$. Parciální derivace podle proměnné y je $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x\frac{2y}{2\sqrt{x^2-y^2}} + \frac{\frac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}}}{x+\sqrt{x^2-y^2}} = 2y + \frac{xy}{\sqrt{x^2-y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}\left(x+\sqrt{x^2-y^2}\right)}$, po dosazení $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 8 + \frac{20}{3} - \frac{4}{24} = 8 + \frac{20}{3} - \frac{1}{6} = \frac{48+40-1}{6} = 14,5$.

Příklad 5. Určete obě parciální derivace funkce $f(x,y) = \arccos(y^3-6) + 5^{x^4y}$.

Řešení. Parciální derivace podle proměnné x je $\frac{\partial f}{\partial x} = 5^{x^4 y} \cdot \ln 5 \cdot 4x^3 y$; parciální derivace podle proměnné y je $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3y^2}{\sqrt{1-(y^3-6)^2}} + 5^{x^4 y} \cdot \ln 5 \cdot x^4 = \frac{-3y^2}{\sqrt{-y^6+12y^3-35}} + 5^{x^4 y} \cdot \ln 5 \cdot x^4$.

Příklad 6. Určete obě parciální derivace funkce $f(x,y) = \sqrt{x}\sin xy + \sqrt{y}\cos xy$.

Řešení. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin xy + y\sqrt{x}\cos xy - y\sqrt{y}\sin xy = \sin xy\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - y\sqrt{y}\right) + y\sqrt{x}\cos xy$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x\sqrt{x}\cos xy + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos xy - x\sqrt{y}\sin xy = \cos xy(x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{y}}) - x\sqrt{y}\sin xy$.

Příklad 7. Určete parciální derivace 2. řádu funkce $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{2x+3y}{2x-3y}$.

Řešení. Parciální derivace podle proměnné x je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{2x+3y}{2x-3y}\right)^2} \cdot \frac{2(2x-3y)-(2x+3y)2}{(2x-3y)^2} = \frac{(2x-3y)^2}{(2x-3y)^2+(2x+3y)^2} \cdot \frac{4x-6y-4x-6y}{(2x-3y)^2} = \frac{-6y}{4x^2+9y^2}$; parciální derivace podle proměnné y je $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{2x+3y}{2x-3y}\right)^2} \cdot \frac{3(2x-3y)-(2x+3y)(-3)}{(2x-3y)^2} = \frac{(2x-3y)^2}{(2x-3y)^2+(2x+3y)^2} \cdot \frac{6x-9y+6x+9y}{(2x-3y)^2} = \frac{6x}{4x^2+9y^2}$.
Parciální derivace 2. řádu: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{6y\cdot 8x}{(4x^2+9y^2)^2} = \frac{48xy}{(4x^2+9y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-6(4x^2+9y^2)+6y\cdot 18y}{(4x^2+9y^2)^2} = \frac{54y^2-24x^2}{(4x^2+9y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-6x\cdot 18y}{(4x^2+9y^2)^2} = \frac{-108xy}{(4x^2+9y^2)^2}$.

Příklad 8. Určete parciální derivace 2. řádu funkce $f(x,y) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 y}$.

Řešení. První parciální derivace zadané funkce jsou:
$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2\sin x\cos x}{1+\cos^2 y} = \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 y}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-\sin^2 x\cdot 2\cos y(-\sin y)}{(1+\cos^2 y)^2} = \frac{\sin^2 x\cdot\sin 2y}{(1+\cos^2 y)^2}$.
Parciální derivace 2. řádu jsou: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2\cos 2x}{1+\cos^2 y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-\sin 2x\cdot 2\cos y(-\sin y)}{(1+\cos^2 y)^2} = \frac{\sin 2x\cdot\sin 2y}{(1+\cos^2 y)^2}$
a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\sin^2 x\cdot 2\cos 2y\left(1+\cos^2 y\right)^2 - \sin^2 x\cdot\sin 2y\cdot 2(1+\cos^2 y)\cdot 2\cos y\cdot(-\sin y)}{(1+\cos^2 y)^4} =$
$= \frac{2\sin^2 x\cos 2y(1+\cos^2 y)+2\sin^2 x\cdot\sin^2 2y}{(1+\cos^2 y)^3} = \frac{2\sin^2 x(\cos 2y+\cos 2y\cdot\cos^2 y+\sin^2 2y)}{(1+\cos^2 y)^3}$.

Příklad 9. Určete parciální derivace 2. řádu funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{x^2}{y}$.

Řešení. První parciální derivace jsou: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{3} + \frac{1}{1+\left(\frac{x^2}{y}\right)^2} \cdot \frac{2xy}{y^2} = \frac{2x}{3} + \frac{y^2}{y^2+x^4} \cdot \frac{2x}{y} = \frac{2x}{3} + \frac{2xy}{x^4+y^2}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^4}{y^2}} \cdot \frac{-x^2}{y^2} = \frac{-x^2}{x^4+y^2}$. Parciální derivace druhého řádu jsou: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{3} + \frac{2y(x^4+y^2)-2xy\cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{2}{3} + \frac{2x^4y+2y^3-8x^4y}{(x^4+y^2)^2} = \frac{2}{3} + \frac{2y^3-6x^4y}{(x^4+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2y}{(x^4+y^2)^2}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2x(x^4+y^2)+x^2\cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2} = \frac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2} = \frac{2x(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}$.

Příklad 10. Vypočtěte hodnoty všech parciálních derivací prvního i druhého řádu funkce $f(x,y) = x^2y - \frac{y^2}{x^2} + 3\sqrt{x} - 4\sqrt{y}$ v bodě $B = (1,4)$.

Řešení. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + \frac{2xy^2}{x^4} + \frac{3}{2\sqrt{x}} = 2xy + \frac{2y^2}{x^3} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(B) = 8 + 32 + \frac{3}{2} = 41,5$.
$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - \frac{2y}{x^2} - \frac{2}{\sqrt{y}}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(B) = 1 - 8 - 1 = -8$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y - \frac{6y^2}{x^4} - \frac{3}{4x\sqrt{x}}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = 8 - 96 - 0,75 = -88,75$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{y\sqrt{y}}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) = -2 + \frac{1}{8} = -\frac{15}{8}$.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x + \frac{4y}{x^3}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) = 2 + 16 = 18$.

Příklad 11. Určete všechny parciální derivace 2. řádu funkce zadané předpisem $f(x,y) = \operatorname{arccotg}(xy) + \log_7(x^5 \cdot \sqrt{y})$.

Řešení. $\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{1+x^2y^2} + \frac{5x^4\sqrt{y}}{x^5\cdot\sqrt{y}\ln 7} = \frac{5}{x\cdot\ln 7} - \frac{y}{1+x^2y^2}$;
$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{x^5\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}}{x^5\cdot\sqrt{y}\cdot\ln 7} = \frac{1}{2y\cdot\ln 7} - \frac{x}{1+x^2y^2}$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-5\cdot\ln 7}{x^2\cdot\ln^2 7} + \frac{y\cdot 2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{2xy^3}{(1+x^2y^2)^2} - \frac{5}{x^2\cdot\ln 7}$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2\ln 7}{4y^2\ln^2 7} + \frac{x\cdot x^2 2y}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(1+x^2y^2)^2} - \frac{1}{2y^2\cdot\ln 7}$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -\frac{1+x^2y^2-y\cdot 2x^2y}{(1+x^2y^2)^2} = -\frac{1+x^2y^2-2x^2y^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{x^2y^2-1}{(1+x^2y^2)^2}$.

Příklad 12. Určete parciální derivace 1. řádu funkce zadané předpisem $f(x,y) = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{y-2x}{y+2x}} + \frac{1}{2}\sqrt{y^2-4x^2}$.

Řešení. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y-2x}{y+2x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{y-2x}{y+2x}}}\cdot\frac{-2(y+2x)-2(y-2x)}{(y+2x)^2} + \frac{-8x}{4\sqrt{y^2-4x^2}} = \frac{y+2x}{2y}\cdot\frac{\sqrt{y+2x}}{2\sqrt{y-2x}}\cdot\frac{-4y}{(y+2x)^2} -$
$-\frac{2x}{\sqrt{y^2-4x^2}} = \frac{-\sqrt{y+2x}}{\sqrt{y-2x}(y+2x)} - \frac{2x}{\sqrt{y^2-4x^2}} = \frac{-1}{\sqrt{y-2x}\sqrt{y+2x}} - \frac{2x}{\sqrt{y^2-4x^2}} = -\frac{1+2x}{\sqrt{y-2x}\sqrt{y+2x}} =$
$= -\frac{1+2x}{\sqrt{y^2-4x^2}}$;
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{y-2x}{y+2x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{y-2x}{y+2x}}}\cdot\frac{y+2x-y+2x}{(y+2x)^2} + \frac{2y}{4\sqrt{y^2-4x^2}} = \frac{y+2x}{2y}\cdot\frac{\sqrt{y+2x}}{2\sqrt{y-2x}}\cdot\frac{4x}{(y+2x)^2} + \frac{y}{2\sqrt{y^2-4x^2}} =$
$= \frac{x\sqrt{y+2x}}{y\sqrt{y-2x}(y+2x)} + \frac{y}{2\sqrt{y^2-4x^2}} = \frac{x}{y\sqrt{y^2-4x^2}} + \frac{y}{2\sqrt{y^2-4x^2}} = \frac{2x+y^2}{2y\sqrt{y^2-4x^2}}$.

Příklad 13. Určete všechny parciální derivace 2. řádu funkce zadané předpisem $f(x,y) = \frac{1}{8}\ln\frac{4x-3y}{4x+3y} - \frac{1}{8}\ln(16x^2-9y^2)$.

Řešení. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{8}\cdot\frac{4x+3y}{4x-3y}\cdot\frac{4(4x+3y)-4(4x-3y)}{(4x+3y)^2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{32x}{16x^2-9y^2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{24y}{16x^2-9y^2} - \frac{4x}{16x^2-9y^2} =$
$= \frac{3y-4x}{16x^2-9y^2} = -\frac{4x-3y}{(4x-3y)(4x+3y)} = -\frac{1}{4x+3y}$;
$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{8}\cdot\frac{4x+3y}{4x-3y}\cdot\frac{-3(4x+3y)-3(4x-3y)}{(4x+3y)^2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{-18y}{16x^2-9y^2} = \frac{-3x}{16x^2-9y^2} + \frac{9y}{4(16x^2-9y^2)} = \frac{-12x+9y}{4(16x^2-9y^2)} =$
$= \frac{-3(4x-3y)}{4(16x^2-9y^2)} = \frac{-3}{4(4x+3y)}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{4}{(4x+3y)^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{3}{(4x+3y)^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{9}{4(4x+3y)^2}$.

Příklad 14. Vypočtěte hodnoty všech druhých parciálních derivací funkce $f(x,y) = (3x^2+4y^2)\cdot e^{x^2+y^3}$ v bodě $C = (1,-1)$.

Řešení. Parciální derivace 1. řádu jsou:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x\cdot e^{x^2+y^3} + (3x^2+4y^2)\cdot 2x\cdot e^{x^2+y^3} = e^{x^2+y^3}(6x+6x^3+8xy^2)$;
$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y\cdot e^{x^2+y^3} + (3x^2+4y^2)\cdot e^{x^2+y^3}\cdot 3y^2 = e^{x^2+y^3}(8y+9x^2y^2+12y^4)$;
Parciální derivace 2. řádu jsou:
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{x^2+y^3}\cdot 2x(6x+6x^3+8xy^2) + e^{x^2+y^3}(6+18x^2+8y^2)$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = 1\cdot 2(6+6+8) + 1(6+18+8) = 40+32 = 72$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 3y^2\cdot e^{x^2+y^3}(6x+6x^3+8xy^2) + e^{x^2+y^3}\cdot 16xy = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,-1) = 3(6+6+8) - 16 = 60-16 = 44$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 3y^2e^{x^2+y^3}(8y+9x^2y^2+12y^4) + e^{x^2+y^3}(8+18x^2y+48y^3)$;
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1) = 3(-8+9+12) + (8-18-48) = 39-58 = -19$.

ASYMPTOTY GRAFU FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

Příklad 1. Určete rovnice všech asymptot grafu funkce $f(x) = x + \frac{3}{x}$.

Řešení. Daná funkce není definovaná pro $x = 0$, v tomto bodě může funkce mít svislou asymptotu. Existence svislé asymptoty je dokázána, pokud alespoň jedna jednostranná limita je nevlastní. Jelikož $\lim\limits_{x\to 0+}(x + \frac{3}{x}) = 0 + \frac{3}{0+} = 0 + \infty = \infty$ (případně $\lim\limits_{x\to 0-}(x + \frac{3}{x}) = 0 + \frac{3}{0-} = 0 - \infty = -\infty$), má graf této funkce asymptotu o rovnici $x = 0$, což je osa y. Symbolem 0^+ rozumíme kladné číslo blížící se nule, 0^- záporné číslo blížící se nule. Dále zjistíme, zda má graf asymptotu o rovnici $y = kx + q$. Vypočteme $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+\frac{3}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(1 + \frac{3}{x^2}) = 1$ a $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(x + \frac{3}{x} - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x} = 0$. Druhá asymptota grafu funkce má rovnici $y = x$.

Příklad 2. Určete rovnice všech asymptot grafu funkce $f(x) = \frac{3x^2+2x-5}{x}$.

Řešení. Tato funkce opět není definovaná pro $x = 0$. Jelikož $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{3x^2+2x-5}{x} = \frac{-5}{0+} = -\infty$ (příp. $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{3x^2+2x-5}{x} = \infty$), je přímka o rovnici $x = 0$ asymptotou grafu dané funkce. Ke zjištění další asymptoty vypočteme $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+2x-5}{x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6x+2}{2x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6}{2} = 3$ (dvakrát použito l'Hospitalovo pravidlo), $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2+2x-5}{x} - 3x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x-5}{x} = 2$. Přímka $y = 3x + 2$ je tedy druhou asymptotou grafu dané funkce.

Příklad 3. Určete rovnice všech asymptot grafu funkce $f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$.

Řešení. Definičním oborem dané funkce je $\mathbf{R}\backslash\{0\}$. V bodě $x = 0$ určíme jednostranné limity: $\lim\limits_{x\to 0+}(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}) = \infty + \infty = \infty$, (případně $\lim\limits_{x\to 0-}(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}) = \lim\limits_{x\to 0-}(\frac{1}{x^2}(3 + \frac{2}{x})) = \infty \cdot (3 - \infty) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$). Asymptotou grafu funkce je přímka o rovnici $x = 0$. Určíme další asymptotu grafu funkce (o rovnici $y = kx + q$): $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x+2}{x^4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3}{4x^3} = 0$ (v tomto případě jsme použili l'Hospitalovo pravidlo) a $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}) = 0 + 0 = 0$. Po dosazení do rovnice přímky dostaneme rovnici druhé asymptoty $y = 0$.

Příklad 4. Najděte rovnice všech asymptot grafu funkce $f(x) = \frac{x^2+1}{4-x^2}$.

Řešení. Definičním oborem funkce je $\mathbf{R}\backslash\{-2, 2\}$. Opět budeme počítat jednostranné limity: $\lim\limits_{x\to -2+} \frac{x^2+1}{4-x^2} = \infty$, (ev. $\lim\limits_{x\to -2-} \frac{x^2+1}{4-x^2} = -\infty$), $\lim\limits_{x\to 2-} \frac{x^2+1}{4-x^2} = \infty$, (ev. $\lim\limits_{x\to 2+} \frac{x^2+1}{4-x^2} = -\infty$). Graf funkce má asymptoty o rovnicích $x = -2$, $x = 2$. Vypočteme ještě směrnici asymptoty o rovnici $y = kx + q$: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+1}{4-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{4x-x^3} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{4-3x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2}{-6x} = 0$ a úsek $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{4-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{-2x} = -1$. Další asymptota grafu dané funkce má rovnici $y = -1$.

Příklad 5. Najděte rovnice všech asymptot grafu funkce $f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{1}{x-5}$.

Řešení. Definičním oborem funkce je $\mathbf{R}\setminus\{0,5\}$. Jednostranné limity v bodech $x=0$ a $x=5$ jsou: $\lim\limits_{x\to 0+}(\frac{1}{3x}+\frac{1}{x-5})=\infty-\frac{1}{5}=\infty$ (ev. $\lim\limits_{x\to 0-}(\frac{1}{3x}+\frac{1}{x-5})=-\infty-\frac{1}{5}=-\infty$); $\lim\limits_{x\to 5+}(\frac{1}{3x}+\frac{1}{x-5})=\frac{1}{15}+\infty=\infty$ (ev. $\lim\limits_{x\to 5-}(\frac{1}{3x}+\frac{1}{x-5})=\frac{1}{15}-\infty=-\infty$). Jelikož jsou všechny uvedené limity nevlastní, jsou přímky o rovnicích $x=0$ a $x=5$ asymptotami grafu funkce. Ověříme existenci asymptot ve tvaru $y=kx+q$. Spočítáme $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{3x}+\frac{1}{x-5}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4x-5}{3x^3-15x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{9x^2-30x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4}{3x(3x-10)}=0$ a ještě $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{1}{3x}+\frac{1}{x-5})=0+0=0$. Graf funkce má tedy ještě asymptotu o rovnici $y=0$.

Příklad 6. Určete rovnice všech asymptot grafu funkce $f(x)=\frac{1}{e^x-e^2}$.

Řešení. Daná funkce je definovaná, jestliže platí $e^x-e^2\neq 0$, to znamená $x\neq 2$. Vypočteme $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{1}{e^x-e^2}=\infty$ (ev. $\lim\limits_{x\to 2-}\frac{1}{e^x-e^2}=-\infty$). Limity jsou opět nevlastní, to znamená, že přímka o rovnici $x=2$ je asymptotou grafu dané funkce. Vypočteme dále rovnice asymptot ve tvaru $y=kx+q$: směrnice $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x(e^x-e^2)}$. U této funkce musíme výpočet rozdělit na dvě části, zvlášť pro $x\to\infty$ a pro $x\to-\infty$, neboť tyto limity jsou, jak dále uvidíme, různé. $k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x(e^x-e^2)}=\frac{1}{\infty\cdot\infty}=0$, $q_1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^x-e^2}=0$. A dále $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x(e^x-e^2)}=\frac{1}{-\infty(0-e^2)}=0$ a $q_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x-e^2}=\frac{1}{0-e^2}=-\frac{1}{e^2}$. Rovnice všech asymptot jsou: $x=2$, $y=0$, $y=-\frac{1}{e^2}$.

Příklad 7. Najděte všechny asymptoty grafu funkce $f(x)=x-3\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{1}{x}$.

Řešení. $D(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Vypočteme $\lim\limits_{x\to 0+}(x-3\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{1}{x})=-3\cdot\frac{\pi}{4}+\infty=\infty$, (ev. $\lim\limits_{x\to 0-}(x-3\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{1}{x})=-3\cdot\frac{\pi}{4}-\infty=-\infty$). Z toho plyne, že asymptota rovnoběžná s osou y má rovnici $x=0$, tzn. asymptotou je osa y. Hledejme dále asymptotu o rovnici $y=kx+q$: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x-3\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1-\frac{3\operatorname{arctg}(x+1)}{x}+\frac{1}{x^2})=$ $=1-\frac{3(\pm\frac{\pi}{2})}{\infty}+0=1$ a $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(x-3\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{1}{x}-x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(-3\operatorname{arctg}(x+1)+\frac{1}{x})=$ $=-3\cdot(\pm\frac{\pi}{2})+0=\pm\frac{3\pi}{2}$. Graf dané funkce má asymptoty o rovnicích $x=0$, $y=x-\frac{3\pi}{2}$ a $y=x+\frac{3\pi}{2}$.

Příklad 8. Najděte rovnice všech asymptot grafu funkce $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Řešení. Definičním oborem dané funkce jsou všechna reálná čísla, to znamená, že graf dané funkce nemá asymptoty rovnoběžné s osou y. Pokusme se najít asymptotu o rovnici $y=kx+q$. Vypočteme $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$ a $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$. Platí $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$ a $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-1$. Dostali jsme dvě různá q, a tedy také dvě asymptoty o rovnicích $y=1$ a $y=-1$.

Příklad 9. Určete rovnice všech asymptot funkce $f(x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$.

Řešení. Definiční obor funkce je $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Vypočteme $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2})=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$. Přímka $x=0$ není asymptotou dané funkce, neboť limita funkce v bodě 0 není nevlastní. Zkusíme najít asymptotu o rovnici $y=kx+q$: směrnice $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}}{x}=\frac{\frac{\pi}{2}}{\pm\infty}=0$.

Úsek $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$. Graf funkce má tedy jenom jednu asymptotu, a to přímku $y = \frac{\pi}{2}$.

Příklad 10. Najděte rovnice všech asymptot grafu funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{x+2} + \operatorname{arccotg} 3x$.

Řešení. Definičním oborem funkce $f(x)$ je množina $D(f) = (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. Protože $\lim\limits_{x\to -2+} f(x) = \infty$, je přímka o rovnici $x = -2$ asymptotou grafu funkce $f(x)$. Dále je $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+2x} + \frac{\operatorname{arccotg} 3x}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2(1-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{2}{x})}\right) + \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\operatorname{arccotg} 3x}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} + \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{-3}{1+9x^2}}{1} = 1 + 0 = 1$. Výpočet q rozdělíme na dva případy: $q_1 = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1}{x+2} + \operatorname{arccotg} 3x - x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^2-1-x^2-2x}{x+2} + \operatorname{arccotg} 3x) = \lim\limits_{x\to\infty}(\frac{-1-2x}{x+2} + \operatorname{arccotg} 3x) = -2 + 0 = -2$, $q_2 = \lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{x^2-1}{x+2} + \operatorname{arccotg} 3x - x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{-1-2x}{x+2} + \operatorname{arccotg} 3x) = -2 + \pi$. (Limita zlomku počítána l'Hospitalovým pravidlem.). Přímky popsané rovnicemi $y = x - 2$ a $y = x - 2 + \pi$ jsou dalšími asymptotami grafu funkce $f(x)$.

Příklad 11. Najděte rovnice všech asymptot grafu funkce $f(x) = \frac{2x^2-1}{x-3} + 3x$.

Řešení. Definičním oborem funkce $f(x)$ je množina $D(f) = (-\infty, 3) \cup (3, \infty)$. Protože je $\lim\limits_{x\to 3+} f(x) = \infty$, je přímka o rovnici $x = 3$ asymptotou grafu funkce $f(x)$. Vypočteme $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{2x^2-1}{x^2-3x} + \frac{3x}{x}) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2(2-\frac{1}{x^2})}{x^2(1-\frac{3}{x})} + 3\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}} + 3\right) = 2 + 3 = 5$, $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{2x^2-1}{x-3} + 3x - 5x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\frac{2x^2-1}{x-3} - 2x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{-1+6x}{x-3} = 6$. Proto přímka popsaná rovnicí $y = 5x + 6$ je druhou asymptotou grafu funkce $f(x)$.

Příklad 12. Určete rovnice všech asymptot grafu funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

Řešení. Definičním oborem funkce je $D(f) = (0, \infty)$. Zkusíme hledat svislé asymptoty, tj. rovnoběžné s osou y: $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0+}(\ln x \cdot \frac{1}{x^2}) = -\infty \cdot \infty = -\infty$. Jelikož je tato limita nevlastní, má graf funkce asymptotu o rovnici $x = 0$. Dále počítáme asymptoty ve tvaru $y = kx + q$: $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\ln x}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{3x^3} = 0$ a $q = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$. Graf funkce má tedy ještě asymptotu o rovnici $y = 0$.

Příklad 13. Určete rovnice asymptot grafu funkce $f(x) = x \ln \frac{1}{x^2}$.

Řešení. Jelikož musí platit, že $\frac{1}{x^2} > 0$ a $x \neq 0$, je $D(f) = \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Zjistíme, zda má graf funkce asymptoty rovnoběžné s osou y: $\lim\limits_{x\to 0\pm} x \ln\frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0\pm}\frac{\ln\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0\pm}\frac{x^2\cdot(-2)x^{-3}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0\pm}(2x) = 0$. Limita není nevlastní, proto graf funkce nemá svislou asymptotu. Ověříme existenci asymptoty o rovnici $y = kx + q$: $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x\ln\frac{1}{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\ln\frac{1}{x^2} = -\infty$. Z uvedeného výpočtu plyne, že graf zadané funkce nemá žádné asymptoty.

ROVNICE TEČNY A NORMÁLY GRAFU FUNKCE JEDNÉ PROMĚNNÉ

Příklad 1. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = \frac{x^2+4}{2x^3-1}$ v bodě $T = [1, ?]$.

Řešení. Nejprve dosazením do rovnice křivky spočítáme $y_T = 5$. Danou funkci zderivujeme: $y' = \frac{2x(2x^3-1)-6x^2(x^2+4)}{(2x^3-1)^2} = \frac{4x^4-2x-6x^4-24x^2}{(2x^3-1)^2} = \frac{-2x^4-24x^2-2x}{(2x^3-1)^2}$. Jelikož směrnice tečny je rovna hodnotě derivace v bodě dotyku, dosadíme do derivace $x = 1$ a dostaneme $k_t = y'(1) = \frac{-2-24-2}{1} = -28$. Rovnice přímky, která je určena bodem $[x_0, y_0]$ a směrnicí k je $y - y_0 = k(x - x_0)$, to znamená, že rovnice tečny k dané křivce v daném bodě je $y - 5 = -28(x - 1)$, tj. po úpravě na obecný tvar rovnice přímky $28x + y - 33 = 0$. Normála je přímka kolmá na tečnu v bodě dotyku, a proto pro její směrnici platí $k_n = -\frac{1}{k_t}$. Rovnice normály je tedy $y - 5 = \frac{1}{28}(x - 1)$, po úpravě $x - 28y + 139 = 0$.

Příklad 2. Napište rovnici tečny a normály ke křivce $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x}{1+2x}}$ s dotykovým bodem $T = [1, ?]$.

Řešení. Nejprve opět vypočteme $y_T = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{3}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$. Zderivujeme-li danou funkci, je $y' = \frac{1}{1+\frac{x}{1+2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+2x}}} \cdot \frac{1+2x-2x}{(1+2x)^2} = \frac{\sqrt{1+2x}}{2\sqrt{x}(1+3x)(1+2x)}$. Směrnice tečny je $k_t = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot 4\cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{24}$. Dosazením vypočtených hodnot dostaneme rovnici hledané tečny: $y - \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{24}(x - 1)$ a po úpravě $x\sqrt{3} - 24y - \sqrt{3} + 4\pi = 0$. Rovnice normály je $y - \frac{\pi}{6} = -\frac{24}{\sqrt{3}}(x - 1)$, po úpravě $144x + 6\sqrt{3}y - \pi\sqrt{3} - 144 = 0$.

Příklad 3. Napište rovnice tečen ke křivce $y = \frac{1}{1+x^2}$ v jejích průsečících s křivkou $y = \frac{1}{1+x}$.

Řešení. Nejprve vypočteme souřadnice průsečíků řešením rovnice $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x}$. Pro $x \neq -1$ platí $1 + x = 1 + x^2$, z toho $x(x - 1) = 0$, a tedy $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Dosazením do rovnice křivky vypočteme y–ové souřadnice a máme dva průsečíky $T_1 = [0, 1]$ a $T_2 = [1, \frac{1}{2}]$. Dále vypočítáme derivaci $y' = -(1 + x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ a dosazením x–ových souřadnic dotykových bodů určíme směrnice obou tečen: $k_1 = 0$, $k_2 = -\frac{1}{2}$. Rovnice jedné tečny je $y - 1 = 0$ a druhé po úpravě $x + 2y - 2 = 0$.

Příklad 4. Napište rovnici tečny ke křivce zadané implicitně rovnicí $x^2+y^3-4x+5y = 3$ v bodě $T = [3, 1]$.

Řešení. Nejprve vypočteme derivaci implicitně zadané funkce: $y' = -\frac{2x-4}{3y^2+5} = \frac{4-2x}{3y^2+5}$. Dosazením $x = 3$ a $y = 1$ dostaneme směrnici tečny $k_t = -\frac{1}{4}$. Rovnice hledané tečny je $y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 3)$, po úpravě $x + 4y - 7 = 0$.

Příklad 5. Napište rovnici tečny a normály ke křivce zadané implicitně rovnicí $xy + 3x^2 - (y + 3)^2 = 0$ v bodě $T = [1, -2]$.

Řešení. Nejprve vypočteme derivaci implicitně zadané funkce: $y' = -\frac{y+6x}{x-2(y+3)}$. Směrnice tečny k_t je hodnota derivace v bodě T. Dosazením dostaneme $k_t = -\frac{-2+6}{1-2(-2+3)} =$

$= -\frac{4}{-1} = 4$. Rovnice hledané tečny je $y + 2 = 4(x - 1)$, po úpravě $4x - y - 6 = 0$. Směrnice normály je $k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{4}$. Rovnice hledané normály je tedy $y + 2 = -\frac{1}{4}(x - 1)$, po úpravě $x + 4y + 7 = 0$.

Příklad 6. Napište rovnici té tečny ke křivce $y = \arcsin\sqrt{4x}$, která je rovnoběžná s přímkou p o rovnici $4x - y = 5$.

Řešení. Rovnici přímky převedeme na směrnicový tvar $y = 4x - 5$, z něhož vyčteme, že směrnice přímky $k_p = 4$. Pak i tečna s přímkou rovnoběžná má směrnici $k_t = 4$. Protože víme, že směrnice tečny je rovna hodnotě derivace v bodě dotyku, spočítáme první derivaci dané funkce. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x}} \cdot 4 = \frac{1}{\sqrt{x(1-4x)}}$. Vyřešíme-li rovnici $y' = 4$, získáme souřadnice bodu dotyku. Takže $\frac{1}{\sqrt{x-4x^2}} = 4$. Po odstranění zlomku a umocnění rovnice je $1 = 16x - 64x^2$, tj. $64x^2 - 16x + 1 = 0$. Tato kvadratická rovnice má jeden reálný kořen $x = \frac{1}{8}$. Pak $T = [\frac{1}{8}, \frac{\pi}{4}]$ a rovnice tečny je $y - \frac{\pi}{4} = 4(x - \frac{1}{8})$, tj. $16x - 4y - 2 + \pi = 0$.

Příklad 7. Napište rovnici té tečny ke křivce $y = \ln(x^3 + x^2)$, která je rovnoběžná s přímkou p o rovnici $y = 1 - 2x$.

Řešení. Daná funkce je definovaná, jestliže platí $x^3 + x^2 > 0$, po úpravě $x^2(x + 1) > 0$, tzn. $x > -1$ a $x \neq 0$, tedy $x \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$. Po zderivování dostaneme $y' = \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2}$. Má-li být tečna rovnoběžná s danou přímkou, musí platit, že $\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2} = -2$. Z toho $x(2x^2 + 5x + 2) = 0$. Pak $x_1 = 0$ (není v definičním oboru), $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -2$ (není v definičním oboru). Dotykovým bodem tečny je bod $T = [-\frac{1}{2}, -\ln 8]$ a rovnice tečny má tvar $2x + y + \ln 8 + 1 = 0$.

Příklad 8. Napište rovnici té tečny ke křivce $y = \sin 2x$, která je rovnoběžná s přímkou p o rovnici $y = x$. Úlohu řešte na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Řešení. Protože má být tečna rovnoběžná s přímkou p, musí být $k_t = k_p = 1$. Po zderivování dostaneme $y' = 2\cos 2x$. Směrnice tečny je rovna hodnotě derivace v bodě dotyku, a tedy řešením rovnice $2\cos 2x = 1$ získáme x-ovou souřadnici bodu dotyku: $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \frac{\pi}{3}$, tj. $x = \frac{\pi}{6}$. Bod dotyku je tedy $T = [\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}]$ a rovnice tečny je $y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1(x - \frac{\pi}{6})$, po úpravě $6x - 6y + 3\sqrt{3} - \pi = 0$.

Příklad 9. Napište rovnici té tečny ke křivce $y = \ln\frac{1}{2x^2+2x-1}$, která je kolmá na přímku p o rovnici $5x - 10y + 1 = 0$.

Řešení. Nejprve určíme definiční obor funkce. Z podmínky $2x^2 + 2x - 1 > 0$ plyne, že $D(f) = (-\infty, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}) \cup (\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \infty)$. Rovnici přímky převedeme na směrnicový tvar $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{10}$, z něhož vidíme, že $k_p = \frac{1}{2}$. Pak každá tečna na přímku kolmá má směrnici $k_t = -\frac{1}{k_p} = -2$. Pro určení bodu dotyku funkci zderivujeme a derivaci položíme rovnu -2. Nejprve funkci upravíme na tvar $\ln\frac{1}{2x^2+2x-1} = \ln 1 - \ln(2x^2 + 2x - 1) = -\ln(2x^2 + 2x - 1)$. Derivace potom je $y' = -\frac{4x+2}{2x^2+2x-1}$. Pro určení souřadnic bodu dotyku řešíme rovnici $-\frac{4x+2}{2x^2+2x-1} = -2$, z toho $4x + 2 = 4x^2 + 4x - 2$. Kořeny této rovnice jsou $x_{1,2} = \pm 1$, ale kořen $x_2 = -1$ neleží v definičním oboru. Dotykový bod má tedy souřadnice $T = [1, -\ln 3]$ a tečna má rovnici $y + \ln 3 = -2(x - 1)$, po úpravě $2x + y - 2 + \ln 3 = 0$.

Příklad 10. Napište rovnici té tečny ke křivce $y = 2x^3 + 2x^2$, která je rovnoběžná se spojnicí vrcholu paraboly o rovnici $y = x^2 + 4x$ s bodem $[0, 0]$.

Řešení. Vrchol paraboly určíme buď doplněním pravé strany rovnice na čtverec nebo zde bude výhodnější nalézt lokální minimum funkce. Derivaci $y' = 2x + 4$ položíme rovnu nule a řešením této rovnice dostaneme $x_V = -2$. Po dosazení do rovnice paraboly již známe vrchol $V = [-2, -4]$. Směrnice spojnice vrcholu paraboly s bodem $[0, 0]$ je $k_p = \frac{-4-0}{-2-0} = 2$. Je-li tečna rovnoběžná s touto přímkou, pak i směrnice tečny je $k_t = 2$. Známe tedy směrnici tečny, ale neznáme bod dotyku. Protože víme, že směrnice tečny je rovna hodnotě derivace v bodě dotyku, položíme derivaci rovnu 2 a z rovnice spočítáme x–ovou souřadnici bodu dotyku. $y' = 6x^2 + 4x$, z toho $6x^2 + 4x = 2$, po úpravě $3x^2 + 2x - 1 = 0$. Řešíme kvadratickou rovnici $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6}$ a dostáváme dva kořeny $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{3}$. Máme dva dotykové body (po dopočítání druhých souřadnic) $T_1 = [-1, 0]$ a $T_2 = [\frac{1}{3}, \frac{8}{27}]$. Rovnice první tečny je $y - 0 = 2(x + 1)$, z toho $2x - y + 2 = 0$. A druhá tečna má rovnici $y - \frac{8}{27} = 2(x - \frac{1}{3})$, po úpravě $54x - 27y - 10 = 0$.

Příklad 11. Napište rovnici té normály ke křivce $f(x) = \frac{3x+2}{5x+6}$, která je rovnoběžná s přímkou p o rovnici $2x + y + 1 = 0$.

Řešení. Směrnice přímky $k_p = -2$, to znamená, že i $k_n = -2$ a tedy $-\frac{1}{f'(x)} = -2$. Derivace je $f'(x) = \frac{3(5x+6)-5(3x+2)}{(5x+6)^2} = \frac{8}{(5x+6)^2}$. Pak musí platit $-\frac{(5x+6)^2}{8} = -2$, tj. $25x^2 + 60x + 36 = 16$, $25x^2 + 60x + 20 = 0$, $5x^2 + 12x + 4 = 0$ a $x_1 = -\frac{2}{5}, x_2 = -2$. Potom $y_1 = \frac{1}{5}$, $y_2 = 1$, takže $T_1 = [-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}]$, $T_2 = [-2, 1]$. Rovnice normál jsou $n_1 : y - \frac{1}{5} = -2(x + \frac{2}{5})$, po úpravě $10x + 5y + 3 = 0$ a $n_2 : y - 1 = -2(x + 2)$, po úpravě $2x + y + 3 = 0$.

Příklad 12. Určete body z intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, v nichž jsou tečny ke křivce o rovnici $y = 6\sin^2 x + 8\cos^3 x$ rovnoběžné s osou x.

Řešení. Je-li tečna rovnoběžná s osou x, pak její směrnice $k_t = 0$. Vypočteme nejprve derivaci: $y' = 12\sin x \cdot \cos x - 24\cos^2 x \cdot \sin x$ a položíme ji rovnu 0. Platí $12\sin x \cdot \cos x - 24\cos^2 x \cdot \sin x = 0$. Po vytknutí je $12\sin x \cdot \cos x(1 - 2\cos x) = 0$, což podle známého vzorce lze napsat jako $6\sin 2x(1 - 2\cos x) = 0$. Z toho $\sin 2x = 0$, a tedy $2x = k\pi$ a v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, nebo $\cos x = \frac{1}{2}$ a z toho $x_3 = \frac{\pi}{3}$. Body, v nichž jsou tečny k dané křivce rovnoběžné s osou x tedy jsou $A = [0, 8]$, $B = [\frac{\pi}{2}, 6]$ a $C = [\frac{\pi}{3}, \frac{11}{2}]$.

Příklad 13. Vypočtěte odchylku křivky o rovnici $y = e^{x^2+x}$ od osy y.

Řešení. Odchylkou křivky od osy y rozumíme ostrý úhel, který svírá osa y s tečnou k dané křivce v jejich průsečíku. Rovnice osy y je $x = 0$, a proto průsečík křivky s osou y je $A = [0, 1]$. Derivace je $y' = e^{x^2+x}(2x + 1)$. Hodnota derivace v tomto průsečíku je směrnice tečny ke křivce v bodě A, tj. $k = 1$. Víme, že směrnice přímky je tangenta úhlu, který přímka svírá s kladným směrem osy x. Je-li $\operatorname{tg} \alpha = 1$, pak $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Svírá-li tečna úhel $\frac{\pi}{4}$ s osou x, svírá stejný úhel i s osou y. Odchylka dané křivky od osy y je tedy $\frac{\pi}{4}$ (tj. 45°).

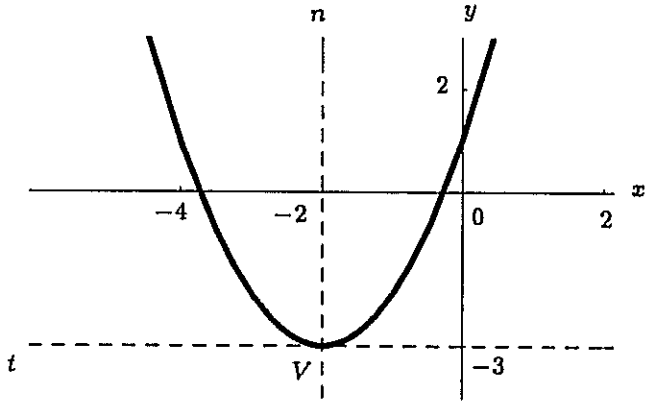
Příklad 14. Vypočtěte odchylku křivek $y = 4x - x^2$ a $y = \frac{x^2}{2} - 2x$.

Řešení. Odchylkou křivek rozumíme ostrý úhel, který svírají příslušné tečny k těmto křivkám v jejich průsečíku. Řešením rovnice $4x - x^2 = \frac{x^2}{2} - 2x$ vypočteme tedy nejdříve

průsečíky obou křivek. Po úpravě rovnice je $3x(x-4)=0$ a z toho $x_1=0$, $x_2=4$. Nalezli jsme dva průsečíky, a to body $A=[0,0]$ a $B=[4,0]$. Vybereme např. bod B a spočítáme směrnice obou tečen. Pro funkci $y=4x-x^2$ je $y'=4-2x$ a $k_1=-4$. Pro $y=\frac{x^2}{2}-2x$ je $y'=x-2$ a $k_2=2$. Dosadíme-li do vzorce pro odchylku dvou přímek je $\operatorname{tg}\varphi=|\frac{-4-2}{1-8}|=\frac{6}{7}$, a tedy $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{6}{7}$, což je přibližně $40°36'$. Odchylka daných křivek je $40°36'$. Stejný výpočet bychom mohli provést pro bod A, ale dospěli bychom ke stejnému výsledku. Zadané křivky jsou totiž paraboly, jejichž osy jsou totožné (přímka $x=2$), tzn. jsou podle této osy souměrné, tudíž i obě odchylky jsou stejné.

Příklad 15. Napište rovnici tečny a normály k parabole $y=x^2+4x+1$ v jejím vrcholu.

Řešení. Nejprve vypočteme souřadnice vrcholu paraboly. To můžeme třeba udělat převedením rovnice paraboly na tvar $y-y_V=2p(x-x_V)^2$. Je $y=x^2+4x+1=$ $=(x+2)^2-3$, tedy $y+3=(x+2)^2$. Odsud už vidíme, že vrchol paraboly má souřadnice $V=[-2,-3]$. Ke stejnému výsledku bychom dospěli, pokud bychom hledali souřadnice vrcholu paraboly jako extrém funkce. Víme, že v bodě, ve kterém má funkce extrém, je derivace funkce rovna nule. Tedy $y'=2x+4$, derivaci položíme rovnu nule, tj. $2x+4=0$, odsud $x=-2$. Dopočítáme y-ovou souřadnici bodu vrcholu a máme opět $V=[-2,-3]$. Pro určení směrnice tečny k_t v bodě V potřebujeme znát hodnotu derivace dané funkce v tomto bodě. Je $k_t=y'(-2)=0$. Rovnice hledané tečny je tedy $y+3=0(x+2)$, po úpravě $y=-3$. Jelikož $k_t=0$, potom normála ke grafu funkce $y=x^2+4x+1$ příslušná k tečně s dotykovým bodem V má analytické vyjádření $x=-2$. Tečna v bodě V je totiž přímka rovnoběžná s osou x, tedy normála musí být přímka rovnoběžná s osou y procházející stejným bodem V. (viz obr. 11).



Obr. 11 Graf paraboly $y=x^2+4x+1$, tečna a normála v jejím vrcholu.

Příklad 16. Napište rovnici tečny ke křivce $y=\arccos\frac{x+1}{2-x}$ v jejím průsečíku s osou y.

Řešení. Určíme souřadnice průsečíku dané křivky s osou y. Víme, že v tomto průsečíku je $x=0$, tedy $y=\arccos\frac{0+1}{2-0}=\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$. Souřadnice průsečíku jsou $P=[0,\frac{\pi}{3}]$. K určení rovnice tečny potřebujeme znát hodnotu derivace dané křivky v tomto bodě. Je $y'=-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x+1}{2-x})^2}}\cdot\frac{2-x-(x+1)(-1)}{(2-x)^2}$ a $k_t=y'(0)=-\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}}\cdot\frac{2+1}{2^2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Rovnice hledané tečny je tedy $y-\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}x$, po úpravě $y=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\pi}{3}$.

TEČNÁ ROVINA A NORMÁLA GRAFU FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

Příklad 1. Napište rovnici tečné roviny a normály k ploše o rovnici $z = \ln \frac{2x+3y}{2x-3y}$ v dotykovém bodě $T = [-1, 0, ?]$.

Řešení. Nejprve vypočteme třetí souřadnici bodu T, tj. $z_T = \ln \frac{-2}{-2} = \ln 1 = 0$. Pro sestavení normálového vektoru tečné roviny potřebujeme určit parciální derivace funkce. Nejprve podle x: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{2x+3y}{2x-3y}} \cdot \frac{2(2x-3y)-2(2x+3y)}{(2x-3y)^2} = \frac{2x-3y}{2x+3y} \cdot \frac{4x-6y-4x-6y}{(2x-3y)^2} = \frac{-12y}{(2x+3y)(2x-3y)} = \frac{-12y}{4x^2-9y^2}$; parciální derivace podle y: $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\frac{2x+3y}{2x-3y}} \cdot \frac{3(2x-3y)+3(2x+3y)}{(2x-3y)^2} = \frac{2x-3y}{2x+3y} \cdot \frac{6x-9y+6x+9y}{(2x-3y)^2} = \frac{12x}{(2x+3y)(2x-3y)} = \frac{12x}{4x^2-9y^2}$. Hodnoty parciálních derivací v bodě T jsou $\frac{\partial z}{\partial x}(-1,0) = 0$, $\frac{\partial z}{\partial y}(-1,0) = -3$. Normálový vektor hledané tečné roviny je $\vec{n} = (0, -3, -1)$ nebo $(0, 3, 1)$. Rovnice tečné roviny je $z - 0 = 0(x+1) - 3(y-0)$, tj. $3y + z = 0$. Normála je přímka kolmá na tečnou rovinu v bodě T. Směrovým vektorem normály je normálový vektor tečné roviny nebo jeho libovolný násobek. Můžeme tedy použít $\vec{s} = (0, 3, 1)$. Potom parametrické vyjádření rovnice normály je $x = -1$, $y = 3t$, $z = t$, $t \in \mathbf{R}$.

Příklad 2. Napište rovnici tečné roviny k ploše o rovnici $z = \ln \sqrt{9x^2 - 2y^3}$ v bodě $T = [1, -2, ?]$. Určete též parametrické vyjádření rovnice normály.

Řešení. Vypočteme $z(1,-2) = \ln \sqrt{9+16} = \ln 5$. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{9x^2-2y^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{9x^2-2y^3}} \cdot 18x = \frac{9x}{9x^2-2y^3}$; $\frac{\partial z}{\partial x}(1,-2) = \frac{9}{25}$. Podobně vypočteme $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{9x^2-2y^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{9x^2-2y^3}} \cdot (-6y^2) = \frac{-3y^2}{9x^2-2y^3}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,-2) = -\frac{12}{25}$. Pak $\vec{n} = (\frac{9}{25}, \frac{-12}{25}, -1)$ nebo libovolný násobek tohoto vektoru, např. $(9, -12, -25)$. Tečná rovina je určena rovnicí $25(z - \ln 5) = 9(x-1) - 12(y+2)$ nebo po úpravě obecnou rovnicí $9x - 12y - 25z + 25\ln 5 - 33 = 0$. Parametrické rovnice normály jsou: $x = 1 + 9t$, $y = -2 - 12t$, $z = \ln 5 - 25t$, $t \in \mathbf{R}$.

Příklad 3. Určete rovnici tečné roviny k ploše, která je zadaná rovnicí $z = x^2 + 3y^3 \operatorname{arctg} x + x^2 \ln \frac{x}{y} - 1$ v bodě $M = [1, 1, ?]$.

Řešení. Nejprve vypočteme $z(1,1) = 1 + \frac{3\pi}{4} - 1 = \frac{3}{4}\pi$. Dále určíme parciální derivaci podle proměnné x: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + \frac{3y^3}{1+x^2} + 2x \ln \frac{x}{y} + x^2 \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{y} = 3x + \frac{3y^3}{1+x^2} + 2x \ln \frac{x}{y}$ a podle y: $\frac{\partial z}{\partial y} = 9y^2 \operatorname{arctg} x + x^2 \cdot \frac{y}{x} \cdot (-\frac{x}{y^2}) = 9y^2 \operatorname{arctg} x - \frac{x^2}{y}$. Dosadíme souřadnice dotykového bodu a dostaneme $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ a $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \frac{9\pi}{4} - 1$. Potom normálový vektor tečné roviny je $\vec{n} = (\frac{9}{2}, \frac{9\pi}{4} - 1, -1)$ nebo jeho násobek $(18, 9\pi - 4, -4)$. Z analytické geometrie v prostoru víme, že rovnice tečné roviny je $ax + by + cz + d = 0$, kde (a, b, c) je normálový vektor roviny, tedy $18x + (9\pi - 4)y - 4z + d = 0$. Po dosazení bodu M je $18 + 9\pi - 4 - 3\pi = -d$, to znamená, že tečná rovina má rovnici $18x + (9\pi - 4)y - 4z - 14 - 6\pi = 0$.

Příklad 4. Napište rovnici té tečné roviny k ploše o rovnici $z = x^2 - 4xy + y^2$, která je rovnoběžná s rovinou ϱ, jejíž rovnice je $x + y + z - 4 = 0$.

Řešení. Vypočteme $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -4x + 2y$. Hledaná tečná rovina má normálový vektor $(2x_T - 4y_T, 2y_T - 4x_T, -1)$. Souřadnice bodu T sice neznáme, ale víme, že má-li být tečná rovina rovnoběžná s rovinou ϱ, musí platit $(2x_T - 4y_T, 2y_T - 4x_T, -1) =$

$= k\cdot(1,1,1)$, kde $(1,1,1)$ je normálový vektor roviny ϱ. Tedy $2x_T - 4y_T = k$, $2y_T - 4x_T = k$ a $-1 = k$. Řešíme soustavu rovnic $2x_T - 4y_T = -1$ a $2y_T - 4x_T = -1$. Z toho $x_T = \frac{1}{2}$, $y_T = \frac{1}{2}$ a dosazením do rovnice dané plochy $z_T = -\frac{1}{2}$. Rovnice tečné roviny je $(x - \frac{1}{2}) + (y - \frac{1}{2}) + (z + \frac{1}{2}) = 0$, po úpravě $2x + 2y + 2z - 1 = 0$.

Příklad 5. Napište rovnici tečné roviny k ploše, která je zadaná implicitně rovnicí $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 39 = 0$, v bodě $T = [1,2,2]$.

Řešení. Vypočteme parciální derivace funkce $F(x,y,z) = 3x^2+4y^2+5z^2-39$: $\frac{\partial F}{\partial x} = 6x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 8y$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 10z$. Do derivací dosadíme souřadnice bodu T a dostaneme normálový vektor tečné roviny $(6,16,20)$ nebo $(3,8,10)$. Rovnice tečné roviny je $3x+8y+10z+d = 0$, po dosazení souřadnic bodu T dostaneme $3x + 8y + 10z - 39 = 0$.

Příklad 6. K ploše zadané implicitně rovnicí $\operatorname{arctg} x + x^2y^3 - 3y\ln z = 0$ napište rovnici tečné roviny v bodě $T = [0,1,1]$.

Řešení. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} + 2xy^3$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 - 3\ln z$ a $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{3y}{z}$. Po dosazení souřadnic bodu T do parciálních derivací dostáváme normálový vektor $\vec{n} = (1,0,-3)$. Rovnice tečné roviny po úpravě je $x - 3z + 3 = 0$.

Příklad 7. K ploše implicitně dané rovnicí $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 6 = 0$ najděte ty tečné roviny, které jsou rovnoběžné s rovinou ϱ o rovnici $x + 2y + 4z - 2 = 0$.

Řešení. Nejprve vypočteme $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 8y$ a $\frac{\partial F}{\partial z} = 8z$. Normálový vektor roviny ϱ je $(1,2,4)$ a pro normálový vektor tečné roviny s rovinou ϱ rovnoběžné musí platit $(2x_T, 8y_T, 8z_T) = k(1,2,4)$. Porovnáním odpovídajících souřadnic dostaneme $2x_T = k$, $8y_T = 2k$, $8z_T = 4k$, z toho $x_T = \frac{k}{2}$, $y_T = \frac{k}{4}$ a $z_T = \frac{k}{2}$. Bod T leží na dané ploše, takže jeho souřadnice musí rovnici plochy vyhovovat. Pak $\frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4} + k^2 = 6$, řešením je $k_{1,2} = \pm 2$. Úloze vyhovují dva dotykové body $T_1 = [1, \frac{1}{2}, 1]$ a $T_2 = [-1, -\frac{1}{2}, -1]$, a pak jsou řešením i dvě tečné roviny, a to $\tau_1 : x + 2y + 4z = 6$ a $\tau_2 : x + 2y + 4z + 6 = 0$.

Příklad 8. Napište parametrické vyjádření rovnice normály k ploše zadané rovnicí $z = \operatorname{arctg}\frac{1-3x}{5-5y}$ v jejím bodě $T = [2,0,?]$.

Řešení. K určení směrového vektoru normály potřebujeme znát obě parciální derivace:
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+(\frac{1-3x}{5-5y})^2}\cdot\frac{-3}{5-5y} = \frac{-3(5-5y)}{25-50y+25y^2+1-6x+9x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial x}(2,0) = -\frac{3}{10}$.
$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+(\frac{1-3x}{5-5y})^2}\cdot\frac{5(1-3x)}{(5-5y)^2} = \frac{5(1-3x)}{25-50y+25y^2+1-6x+9x^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}(2,0) = -\frac{1}{2}$.
Směrový vektor normály má souřadnice $(-\frac{3}{10}, -\frac{1}{2}, -1)$ nebo $(3,5,10)$. Dosazením x_T, y_T do rovnice plochy vypočteme $z_T = -\frac{\pi}{4}$ a pak parametrické vyjádření rovnice hledané normály je $x = 2 + 3t$, $y = 5t$, $z = -\frac{\pi}{4} + 10t$, $t \in \mathbf{R}$.

Příklad 9. Napište rovnici tečné roviny a normály k ploše zadané implicitně rovnicí $x^2 - 3xy + z^3 - 6 = 0$ s daným dotykovým bodem $M = [2,1,2]$.

Řešení. Normálový vektor tečné roviny (a směrový vektor příslušné normály) k ploše zadané rovnicí $x^2 - 3xy + z^3 - 6 = 0$ a dotykovým bodem $M = [2,1,2]$ je roven $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(2,1,2), \frac{\partial F}{\partial y}(2,1,2), \frac{\partial F}{\partial z}(2,1,2)\right)$. V našem případě je $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 3y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -3x$ a $\frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2$. Normálový vektor je tedy $(1,-6,12)$. Rovnice hledané tečné roviny je

$x - 6y + 12z + d = 0$. Dosazením bodu M do této rovnice dostaneme $d = -20$. Hledaná tečná rovina má rovnici $x - 6y + 12z - 20 = 0$. Příslušnou normálu lze parametricky popsat rovnicemi $x = 2 + t$, $y = 1 - 6t$, $z = 2 + 12t$, $t \in \mathbf{R}$.

Příklad 10. Napište rovnici tečné roviny a normály k ploše zadané implicitně rovnicí $x^3 + xy^4 + 4y - 6z^4 + 5 = 0$ s daným dotykovým bodem $M = [1, 0, 1]$.

Řešení. Vypočteme parciální derivace: $\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^4$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 4xy^3 + 4$ a $\frac{\partial F}{\partial z} = -24z^3$. Normálový vektor je tedy $(3, 4, -24)$. Rovnice tečné roviny je $3x + 4y - 24z + d = 0$. Dosazením bodu M do této rovnice dostaneme $d = 21$. Hledaná tečná rovina je popsána rovnicí $3x + 4y - 24z + 21 = 0$. Normálu lze parametricky popsat rovnicemi $x = 1 + 3t$, $y = 4t$, $z = 1 - 24t$, $t \in \mathbf{R}$.

Příklad 11. Najděte rovnice všech tečných rovin k ploše zadané implicitně rovnicí $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 3z^2 - 6z = 4$, které jsou rovnoběžné s rovinou ϱ danou rovnicí $2x + 2y + 6z - 3 = 0$.

Řešení. Hledané tečné roviny, které mají dotykový bod T, mají normálový vektor $k \cdot (2, 2, 6)$. Vypočteme nejprve parciální derivace podle jednotlivých proměnných: $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + 4$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 6$ a $\frac{\partial F}{\partial z} = 6z - 6$. Pro normálový vektor tečné roviny platí $(2x_T + 4, 2y_T - 6, 6z_T - 6) = k(2, 2, 6)$. Z porovnání příslušných souřadnic obou vektorů dostaneme $x_T = k - 2$, $y_T = k + 3$ a $z_T = k + 1$. Bod T je dotykovým bodem tečné roviny, ale také zároveň bodem ležícím na dané ploše. Po dosazení do rovnice plochy dostaneme $(k-2)^2 + 4(k-2) + (k+3)^2 - 6(k+3) + 3(k+1)^2 - 6(k+1) = 4$, po úpravě $5k^2 - 16 = 4$, a z toho $k = \pm 2$. Dostáváme tedy dva dotykové body $T_1 = [0, 5, 3]$ a $T_2 = [-4, 1, -1]$. V dalším kroku určíme rovnici tečné roviny v bodě T_1: $2x + 2y + 6z + d_1 = 0$. Dosadíme souřadnice bodu T_1 a dostaneme $d_1 = -28$. Rovnice tečné roviny je $2x + 2y + 6z - 28 = 0$, po úpravě $x + y + 3z - 14 = 0$. Podobně vypočteme rovnici druhé tečné roviny: $2x + 2y + 6z + d_2 = 0$, po dosazení $d_2 = 12$, a tedy hledaná tečná rovina je $2x + 2y + 6z + 12 = 0$, po úpravě $x + y + 3z + 6 = 0$.

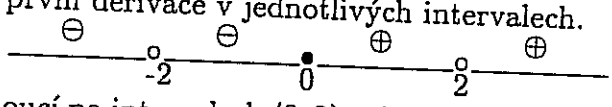
Příklad 12. Vypočtěte odchylku dvou normál sestrojených v bodech $A = [3, 2, ?]$ a $B = [4, 0, ?]$ plochy o rovnici $z = \sqrt{x^2 + y^4}$.

Řešení. Parciální derivace jsou: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(3, 2) = \frac{3}{5}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(4, 0) = 1$ a $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{4y^3}{2\sqrt{x^2+y^4}} = \frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(3, 2) = \frac{16}{5}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(4, 0) = 0$. Směrové vektory normál mají souřadnice $\vec{n}_A = (\frac{3}{5}, \frac{16}{5}, -1)$ nebo jeho násobek $(3, 16, -5)$ a $\vec{n}_B = (1, 0, -1)$. Odchylka dvou přímek je rovna odchylce jejich směrových vektorů a spočítáme ji podle vzorce následujícím způsobem: $\cos\varphi = \frac{|3+5|}{\sqrt{9+256+25}\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{580}} = \frac{4}{\sqrt{145}}$, tedy $\varphi = \arccos\frac{4}{\sqrt{145}}$, což je přibližně $70°35'$. Hledaná odchylka je $\varphi = 70°35'$.

INTERVALY MONOTONIE A EXTRÉMY FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Příklad 1. Určete maximální intervaly monotonie funkce $f(x) = \frac{x^2+1}{4-x^2}$. Určete, ve kterých bodech má funkce lokální extrémy, rozlište maximum, minimum, ostré, neostré.

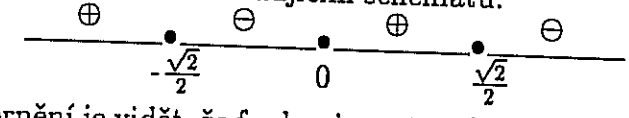
Řešení. Definičním oborem funkce je $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$. Vypočteme první derivaci funkce $f'(x) = \frac{2x(4-x^2)+2x(x^2+1)}{(4-x^2)^2} = \frac{10x}{(4-x^2)^2}$. Protože má daná funkce derivace ve všech vnitřních bodech definičního oboru, může mít lokální extrémy pouze v těch bodech x, ve kterých je první derivace rovna nule. Řešme proto rovnici $\frac{10x}{(4-x^2)^2} = 0$. Jediným kořenem rovnice je $x = 0$. Nyní na číselnou osu vyznačíme krajní body definičního oboru funkce a body „podezřelé z extrému", tj. body, v nichž je první derivace rovna nule. V našem případě rozdělí tyto body množinu reálných čísel na čtyři intervaly. Zjistíme, jaké znaménko má první derivace v jednotlivých intervalech.



Daná funkce je rostoucí na intervalech $\langle 0, 2)$ a $(2, \infty)$ a klesající na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(-2, 0\rangle$. Jelikož je funkce klesající v nějakém levém okolí bodu 0 a rostoucí v nějakém pravém okolí bodu 0, má v bodě $x = 0$ ostré lokální minimum. Jiné lokální extrémy funkce nemá.

Příklad 2. Určete maximální intervaly monotonie funkce $f(x) = \frac{4x^2+1}{(x^2+1)^2}$. Určete, ve kterých bodech má funkce extrémy, rozlište maximum, minimum, lokální, absolutní, ostré, neostré.

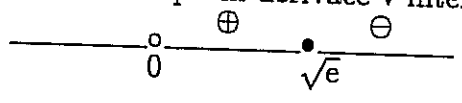
Řešení. Definičním oborem funkce je $D(f) = \mathbf{R}$. Určíme první derivaci funkce $f'(x) = \frac{8x(x^2+1)^2-(4x^2+1)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \frac{8x^3+8x-16x^3-4x}{(x^2+1)^3} = \frac{4x-8x^3}{(x^2+1)^3}$. Derivaci položíme rovnu nule a řešíme rovnici $\frac{4x-8x^3}{(x^2+1)^3} = 0$. Po úpravě $4x\,(1-2x^2) = 0$, z toho $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Získané body vyznačíme na číselnou osu a zjistíme znaménka derivace ve vzniklých intervalech, jak je uvedeno na následujícím schematu.



Z grafického znázornění je vidět, že funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$ a $\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$ a klesající na $\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\rangle$ a $\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$. V bodech $x_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ má funkce lokální ostrá maxima, která jsou zároveň absolutními neostrými maximy $\left(f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4}{3}\right)$. V bodě $x_1 = 0$ má funkce lokální ostré minimum. Daná funkce může mít absolutní minimum pouze v bodě $x_1 = 0$, ale protože je $f(0) = 1$ větší než $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+1}{(x^2+1)^2} = 0$, nemá funkce absolutní minimum.

Příklad 3. Je dána funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Určete, ve kterých bodech má funkce lokální extrémy, rozlište maximum, minimum, ostré, neostré.

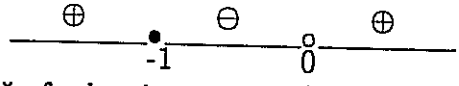
Řešení. Daná funkce je definovaná pro všechna kladná reálná čísla, tedy $D(f) = (0, \infty)$. Derivace je $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - \ln x\cdot 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$. Řešíme rovnici $\frac{1-2\ln x}{x^3} = 0$, z toho $\ln x = \frac{1}{2}$, a tedy $x = \sqrt{e}$. Určíme znaménka první derivace v intervalech $(0, \sqrt{e})$ a $(\sqrt{e}, \infty)$.



Funkce je tedy rostoucí na $(0, \sqrt{e}\rangle$ a klesající na $\langle\sqrt{e}, \infty)$. V bodě $x = \sqrt{e}$ má daná funkce ostré lokální maximum. Funkce nemá minimum.

Příklad 4. Určete maximální intervaly monotonie funkce $f(x) = x \cdot e^{-\frac{1}{x}}$. Určete, ve kterých bodech má funkce lokální extrémy, rozlište maximum, minimum, ostré, neostré.

Řešení. Funkce je definovaná na množině $D(f) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Funkci zderivujeme a výsledek upravíme na jednodušší tvar $f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} + x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot x^{-2} = e^{-\frac{1}{x}}(1 + \frac{1}{x})$. Derivace funkce je rovna nule v bodě $x = -1$. Opět graficky znázorníme znaménka první derivace v intervalech, které dostaneme, znázorníme-li na číselnou osu nulový bod derivace a krajní body definičního oboru.



Ze schematu je vidět, že funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1\rangle$ a $(0, \infty)$ a klesající na intervalu $\langle -1, 0)$. Ostré lokální maximum má funkce v bodě $x = -1$. Funkce nemá lokální minimum.

Příklad 5. Určete maximální intervaly monotonie funkce $f(x) = \ln^2 x + 6 \ln x + 5$. Určete, ve kterých bodech má funkce extrémy, rozlište maximum, minimum, ostré, neostré, lokální, absolutní.

Řešení. Funkce je definovaná pro $x > 0$, tedy $D(f) = (0, \infty)$. Derivace funkce je $f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} + \frac{6}{x}$. Derivaci položíme rovnu nule a řešíme rovnici $\frac{2}{x}(\ln x + 3) = 0$. Řešením je $x = e^{-3}$. Derivace je na intervalu $(0, e^{-3})$ záporná a na intervalu (e^{-3}, ∞) kladná. To znamená, že funkce je klesající na intervalu $(0, e^{-3}\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle e^{-3}, \infty)$ a má ostré lokální minimum, které je i ostrým absolutním minimem, v bodě $x = e^{-3}$.

Příklad 6. Určete, ve kterých bodech na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ má funkce $f(x) = \sin 2x + 2x$ lokální extrémy.

Řešení. Derivace dané funkce je $f'(x) = 2\cos 2x + 2$. Položíme ji rovnu nule. Z rovnice $2\cos 2x + 2 = 0$ plyne $\cos 2x = -1$, z toho $2x = \pi + 2k\pi$, tedy $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ leží dva takové kořeny, a to $x_1 = \frac{\pi}{2}$ a $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Dále víme, že platí $-1 \leq \cos 2x \leq 1$, takže $-2 \leq 2\cos 2x \leq 2$, a tedy $0 \leq 2\cos 2x + 2 \leq 4$. To znamená, že derivace je stále nezáporná, a tedy funkce je na celém intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$ rostoucí, takže nemá žádné lokální extrémy.

Příklad 7. Určete, ve kterých bodech má funkce $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$ absolutní extrémy. Rozlište maximum, minimum, ostré, neostré.

Řešení. Musí být splněny podmínky $x - 3 \geq 0$ a $7 - x \geq 0$, to znamená, že definičním oborem dané funkce je interval $D(f) = \langle 3, 7\rangle$. Absolutní extrémy funkce budeme hledat v krajních bodech tohoto definičního oboru a v bodech lokálních extrémů. Proto určíme derivaci funkce $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{7-x}}$. Derivaci položíme rovnu nule a po jednoduché úpravě řešíme rovnici $\sqrt{7-x} = \sqrt{x-3}$. Řešením je kořen $x = 5$. Absolutní extrémy mohou tedy být pouze v bodech $x = 3$, $x = 5$ a $x = 7$. Vypočteme, že je $f(3) = 2$, $f(5) = 2\sqrt{2}$ a $f(7) = 2$. Závěrem můžeme říci, že funkce má v bodech $x = 3$ a $x = 7$ neostré absolutní minimum a v bodě $x = 5$ má ostré absolutní maximum (které je i ostrým lokálním maximem).

Příklad 8. Určete, ve kterých bodech má funkce $f(x) = x \cdot \sqrt{8 - x^2}$ extrémy, a u každého rozlište, zda se jedná o maximum, minimum, lokální, absolutní, ostré, neostré. Uveďte i neexistenci extrému.

Řešení. Definičním oborem funkce je množina $D(f) = \langle -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \rangle$. Derivace funkce je $f'(x) = \sqrt{8 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2 \cdot \sqrt{8-x^2}} = \frac{(8-x^2)-x^2}{\sqrt{8-x^2}} = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$. Daná funkce může mít lokální extrémy pouze v bodech, kde je její derivace rovna nule. Řešením rovnice $\frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}} = 0$ jsou body $x_1 = -2$ a $x_2 = 2$. Nyní zjistíme znaménka derivace na intervalech $(-2\sqrt{2}, -2)$, $(-2, 2)$ a $(2, 2\sqrt{2})$.

$$\underset{-2\sqrt{2}}{\bullet}\ \ominus\ \underset{-2}{\bullet}\ \oplus\ \underset{2}{\bullet}\ \ominus\ \underset{2\sqrt{2}}{\bullet}$$

Funkce má tedy v bodě $x_1 = -2$ ostré lokální minimum a v bodě $x_2 = 2$ ostré lokální maximum. Jelikož je $f(-2\sqrt{2}) = f(2\sqrt{2}) = 0$, $f(-2) = -4$ a $f(2) = 4$, má funkce $f(x)$ v bodě $x_1 = -2$ také ostré absolutní minimum a v bodě $x_2 = 2$ také ostré absolutní maximum.

Příklad 9. Určete, ve kterých bodech má funkce $f(x) = 2 + \ln(3 - 2x - x^2)$ extrémy, a u každého určete, zda se jedná o maximum, minimum, lokální, absolutní, ostré, neostré. Uveďte i neexistenci extrému.

Řešení. Definičním oborem funkce je množina $D(f) = (-3, 1)$. Protože daná funkce má derivaci ve všech vnitřních bodech svého definičního oboru, může mít lokální extrémy pouze v těch bodech x, ve kterých je $f'(x) = 0$. Jelikož je derivace $f'(x) = \frac{-2-2x}{3-2x-x^2}$, může mít daná funkce pouze jeden lokální extrém a to v bodě $x = -1$.

$$\underset{-3}{\circ}\ \oplus\ \underset{-1}{\bullet}\ \ominus\ \underset{1}{\circ}$$

Snadno vidíme, že pro všechna $x \in (-3, -1)$ je $f'(x) > 0$ a pro všechna $x \in (-1, 1)$ je $f'(x) < 0$. Proto má funkce v bodě $x = -1$ ostré lokální maximum, funkce má v tomto bodě také ostré absolutní maximum. Funkce nemá minimum.

Příklad 10. Určete maximální intervaly monotonie funkce $f(x) = x - \ln \frac{x-1}{x+1}$. Určete, ve kterých bodech má funkce lokální extrémy, rozlište maximum, minimum, ostré, neostré.

Řešení. Nejprve vypočteme definiční obor funkce. Musí být splněny podmínky $x + 1 \neq 0$ a $\frac{x-1}{x+1} > 0$, jejich řešením je $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Určíme derivaci funkce $f'(x) = 1 - \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2-3}{x^2-1}$. Daná funkce má derivaci ve všech vnitřních bodech definičního oboru, může mít tedy lokální extrémy pouze v bodech, kde je derivace rovna nule. Řešíme rovnici $\frac{x^2-3}{x^2-1} = 0$, tedy $x^2 - 3 = 0$, jejími kořeny jsou $x = \pm\sqrt{3}$. Na schematickou číselnou osu vyneseme nulové body derivace a krajní body definičního oboru a vypočteme znaménka derivace v intervalech $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(1, \sqrt{3})$ a $(\sqrt{3}, \infty)$.

$$\oplus\ \underset{-\sqrt{3}}{\bullet}\ \ominus\ \underset{-1}{\circ}\ \underset{1}{\circ}\ \ominus\ \underset{\sqrt{3}}{\bullet}\ \oplus$$

Funkce je tedy rostoucí na intervalech $(-\infty, -\sqrt{3}\rangle$ a $\langle\sqrt{3}, \infty)$. Funkce je klesající na intervalech $\langle -\sqrt{3}, -1)$ a $(1, \sqrt{3}\rangle$. V bodě $x = -\sqrt{3}$ má funkce lokální ostré maximum, v bodě $x = \sqrt{3}$ má funkce lokální ostré minimum.

INTERVALY KONVEXITY A KONKÁVITY

Příklad 1. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce jedné proměnné $f(x) = x^4 + 4x^3 - 18x^2 + 12x$ konvexní či konkávní, a nalezněte inflexní body grafu této funkce.

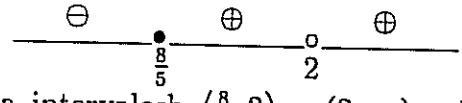
Řešení. Definičním oborem funkce jsou všechna reálná čísla. Konvexitu, konkávitu a inflexní body grafu funkce určíme pomocí druhé derivace. Je $f'(x) = 4x^3+12x^2-36x+12$ a $f''(x) = 12x^2+24x-36 = 12(x-1)(x+3)$. Druhá derivace nabývá hodnoty 0 v bodech $x_1 = 1$ a $x_2 = -3$. Na číselné ose znázorníme tyto kořeny a například metodou nulových bodů určíme znaménka druhé derivace v intervalech $(-\infty, -3)$, $(-3, 1)$ a $(1, \infty)$. Druhá derivace je v prvním intervalu kladná, ve druhém záporná a ve třetím opět kladná. Z toho plyne závěr, že funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, -3\rangle$ a $\langle 1, \infty)$ a konkávní na intervalu $\langle -3, 1\rangle$. Inflexní body má funkce v bodech $x_1 = 1$ a $x_2 = -3$, tj. inflexními body grafu funkce $f(x)$ jsou body $I_1 = [1, -1]$, $I_2 = [-3, -225]$.

Příklad 2. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \ln \frac{1-2x}{1+2x}$ konvexní či konkávní, a nalezněte inflexní body grafu této funkce.

Řešení. Z řešení podmínky $\frac{1-2x}{1+2x} > 0$ plyne, že definičním oborem funkce je interval $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Vypočteme první a druhou derivaci: $f'(x) = \frac{1+2x}{1-2x} \cdot \frac{-2-4x-2+4x}{(1+2x)^2} = \frac{-4}{1-4x^2}$; $f''(x) = \frac{-32x}{(1-4x^2)^2}$. Druhá derivace může být rovna nule jen pro $x = 0$. Snadno vypočteme, že druhá derivace je kladná na intervalu $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ a záporná na intervalu $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. To znamená, že funkce je konvexní na intervalu $\left(-\frac{1}{2}, 0\right\rangle$ a konkávní na intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{2}\right)$. Inflexní bod má funkce v bodě $x = 0$, tj. inflexní bod grafu funkce $f(x)$ je bod $I = [0, 0]$.

Příklad 3. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2x-4}$ konvexní či konkávní, a nalezněte inflexní body grafu této funkce.

Řešení. Daná funkce je definovaná pro všechna $x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}$. Její první derivace je $f'(x) = \frac{1}{1+\frac{x^2}{(2x-4)^2}} \cdot \frac{2x-4-2x}{(2x-4)^2} = \frac{-4}{4x^2-16x+16+x^2} = \frac{-4}{5x^2-16x+16}$, druhá derivace je $f''(x) = \frac{4(10x-16)}{(5x^2-16x+16)^2} = \frac{8(5x-8)}{(5x^2-16x+16)^2}$. Druhá derivace je rovna nule pro $x = \frac{8}{5}$. Na číselnou osu znázorníme $D(f)$ a nulový bod druhé derivace a určíme znaménka vzniklých intervalů.



Křivka je konvexní na intervalech $\left\langle \frac{8}{5}, 2\right)$ a $(2, \infty)$ a konkávní na intervalu $\left(-\infty, \frac{8}{5}\right\rangle$. Inflexní bod má funkce v bodě $x = \frac{8}{5}$, tj. inflexním bodem grafu funkce $f(x)$ je bod $I = \left[\frac{8}{5}, -\operatorname{arctg} 2\right]$.

Příklad 4. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x \cdot e^{2-6x^2}$ konvexní či konkávní, a nalezněte x-ové souřadnice inflexních bodů grafu této funkce.

Řešení. Definičním oborem funkce jsou všechna reálná čísla. Vypočteme první derivaci funkce $f'(x) = e^{2-6x^2} + x \cdot e^{2-6x^2}(-12x) = e^{2-6x^2}(1 - 12x^2)$. A nyní určíme druhou derivaci funkce $f''(x) = e^{2-6x^2}(-12x)(1-12x^2)+e^{2-6x^2}(-24x) = 12xe^{2-6x^2}(12x^2-3) = 36xe^{2-6x^2}(4x^2 - 1)$. Výraz e^{2-6x^2} je pro všechna x kladný, takže nutnou podmínkou pro existenci inflexního bodu grafu dané funkce je $36x(4x^2 - 1) = 0$. Z toho $x_1 = 0$,

$x_{2,3} = \pm\frac{1}{2}$. Tyto body opět můžeme znázornit na číselné ose a zkoumat znaménka druhé derivace v jednotlivých intervalech, které jsme získali. Výsledek je znázorněn na následujícím schematů.

$$\ominus \quad \bullet_{-\frac{1}{2}} \quad \oplus \quad \bullet_{0} \quad \ominus \quad \bullet_{\frac{1}{2}} \quad \oplus$$

Daná funkce je tedy konvexní na intervalech $\langle -\frac{1}{2}, 0\rangle$ a $\langle \frac{1}{2}, \infty)$ a konkávní na intervalech $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$ a $\langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Inflexní body má funkce v bodech $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 0$ a $x_3 = \frac{1}{2}$.

Příklad 5. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = 4x - \sin x + 5$ konvexní či konkávní, a nalezněte inflexní body grafu této funkce.

Řešení. Funkce je definovaná pro všechna reálná čísla. První derivace funkce je $f'(x) = 4 - \cos x$, druhá derivace $f''(x) = \sin x$. Funkce je konkávní na intervalech, kde je $\sin x \leq 0$, tedy na $\langle (2k-1)\pi, 2k\pi\rangle$, $k \in Z$, a konvexní na intervalech $\langle 2k\pi, (2k+1)\pi\rangle$, $k \in Z$. Inflexními body grafu funkce jsou všechny body o souřadnicích $[k\pi, 4k\pi + 5]$, kde $k \in Z$.

Příklad 6. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \frac{3x^3}{2x^2+6}$ konvexní či konkávní, a nalezněte inflexní body grafu této funkce.

Řešení. Definičním oborem dané funkce jsou všechna reálná čísla. Vypočteme nejprve první derivaci $f'(x) = \frac{9x^2(2x^2+6)-3x^3\cdot 4x}{(2x^2+6)^2} = \frac{6x^4+54x^2}{(2x^2+6)^2}$ a dále druhou derivaci funkce $f''(x) = \frac{(24x^3+108x)(2x^2+6)^2-(6x^4+54x^2)\cdot 2(2x^2+6)\cdot 4x}{(2x^2+6)^4} = \frac{(24x^3+108x)(2x^2+6)-(6x^4+54x^2)\cdot 8x}{(2x^2+6)^3} = \frac{72x(9-x^2)}{(2x^2+6)^3}$. Druhá derivace je rovna nule pro $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = 3$. Tyto body znázorníme graficky spolu se znaménky druhé derivace ve vzniklých intervalech.

$$\oplus \quad \bullet_{-3} \quad \ominus \quad \bullet_{0} \quad \oplus \quad \bullet_{3} \quad \ominus$$

Vidíme, že na grafu dané funkce jsou tři inflexní body, a to $I_1 = \left[-3, -\frac{27}{8}\right]$, $I_2 = [0, 0]$, $I_3 = \left[3, \frac{27}{8}\right]$. Funkce je konvexní na intervalech $(-\infty, -3\rangle$ a $\langle 0, 3\rangle$, konkávní na intervalech $\langle -3, 0\rangle$ a $\langle 3, \infty)$.

Příklad 7. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \operatorname{arctg} e^x$ konvexní či konkávní, a nalezněte inflexní body grafu této funkce.

Řešení. Definičním oborem funkce jsou všechna reálná čísla. Vypočteme první a druhou derivaci: $f'(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$, $f''(x) = \frac{e^x(1+e^{2x})-e^x\cdot e^{2x}\cdot 2}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x-e^{3x}}{(1+e^{2x})^2} = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(1+e^{2x})^2}$. Druhá derivace se rovná nule, když platí $e^x(1-e^{2x}) = 0$. Z toho $e^{2x} = 1$, to znamená, že $x = 0$. Druhá derivace je pro záporná x kladná a pro kladná x je záporná. Funkce je tedy konvexní na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a konkávní na intervalu $\langle 0, \infty)$. Inflexním bodem grafu funkce je bod $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Příklad 8. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ konvexní či konkávní, a nalezněte inflexní body grafu této funkce.

Řešení. Pro definiční obor platí $x > 0$ a $\ln x \neq 0$, tj. $x \in (0,1) \cup (1, \infty)$. Vypočteme derivace: $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ a $f''(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\ln^2 x-(\ln x-1)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{2-\ln x}{x\cdot\ln^3 x}$. Položíme-li druhou derivaci rovnu nule, dostaneme rovnici $\ln x = 2$, z toho plyne $x = e^2$. Snadno zjistíme, že druhá derivace je na intervalu $(0,1)$ záporná, na intervalu $(1, e^2)$ kladná a na intervalu

(e^2, ∞) opět záporná. Funkce je konvexní na intervalu $(1, e^2\rangle$ a konkávní na intervalech $(0, 1)$ a $\langle e^2, \infty)$. Inflexní bod grafu funkce má souřadnice $I = \left[e^2, \frac{e^2}{2}\right]$.

Příklad 9. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ konvexní či konkávní, a nalezněte inflexní body grafu této funkce.

Řešení. Definičním oborem dané funkce jsou všechna kladná reálná čísla. První derivace je $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$. Druhá derivace je $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot 2x\sqrt{x} - (2-\ln x)\cdot 3\sqrt{x}}{4x^3} = \frac{\sqrt{x}(3\ln x - 8)}{4x^3}$. Druhá derivace je rovna nule pro $\ln x = \frac{8}{3}$, tedy $x = e^{\frac{8}{3}}$, a $x = 0$. Opět snadno spočítáme, že daná funkce je konvexní na intervalu $\left\langle e^{\frac{8}{3}}, \infty\right)$ a konkávní na intervalu $\left(0, e^{\frac{8}{3}}\right\rangle$. Inflexním bodem grafu funkce je bod $I = \left[e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\right]$.

Příklad 10. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = (1+x^2)\cdot e^{-x^2}$ konkávní či konvexní, a nalezněte x-ové souřadnice inflexních bodů grafu této funkce.

Řešení. Definičním oborem funkce jsou všechna reálná čísla. Nejprve si určíme první a druhou derivaci funkce $f(x)$. Dostaneme, že je $f'(x) = 2x\cdot e^{-x^2} + (1+x^2)\cdot e^{-x^2}(-2x) = -2x^3\cdot e^{-x^2}$ a $f''(x) = -6x^2\cdot e^{-x^2} + (-2x^3)\cdot e^{-x^2}\cdot(-2x) = (-2x^2)\cdot e^{-x^2}\cdot(3-2x^2)$. Druhá derivace nabývá hodnoty 0 v bodech $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ a $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Testováním v jednotlivých intervalech dostaneme, že $f''(x) < 0$ je pro $x \in \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right) \cup \left(0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ a $f''(x) > 0$ pro $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$. Odsud ihned plyne, že funkce $f(x)$ je konkávní na intervalu $\left\langle -\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle$ $\left(= \left\langle -\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\right\rangle \cup \left\langle 0, \sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle\right)$ a konvexní na intervalech $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right\rangle$ a $\left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}, \infty\right)$. Inflexní body grafu funkce mají x-ové souřadnice $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Příklad 11. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x\cdot \operatorname{arctg} x^2$ konkávní či konvexní, a nalezněte x-ové souřadnice inflexních bodů grafu této funkce.

Řešení. Definičním oborem funkce jsou všechna reálná čísla. Nejprve si určíme první a druhou derivaci funkce $f(x)$. Dostaneme, že je $f'(x) = \operatorname{arctg} x^2 + x\cdot\frac{2x}{1+x^4} = \operatorname{arctg} x^2 + \frac{2x^2}{1+x^4}$ a $f''(x) = \frac{2x}{1+x^4} + \frac{4x(1+x^4)-2x^2\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2} = \frac{6x-2x^5}{(1+x^4)^2} = \frac{2x(3-x^4)}{(1+x^4)^2}$. Druhá derivace nabývá hodnoty 0 v bodech $x_1 = 0$, $x_2 = -\sqrt[4]{3}$ a $x_3 = \sqrt[4]{3}$. Testováním v jednotlivých intervalech dostaneme, že je $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -\sqrt[4]{3}) \cup (0, \sqrt[4]{3})$ a $f''(x) < 0$ pro $x \in (-\sqrt[4]{3}, 0) \cup (\sqrt[4]{3}, \infty)$. Odsud ihned plyne, že funkce $f(x)$ je konvexní na intervalech $(-\infty, -\sqrt[4]{3}\rangle$ a $\langle 0, \sqrt[4]{3}\rangle$ a konkávní na intervalech $\langle -\sqrt[4]{3}, 0\rangle$ a $\langle \sqrt[4]{3}, \infty)$. Inflexní body grafu funkce mají x-ové souřadnice $x = 0$ a $x = \pm\sqrt[4]{3}$.

Příklad 12. Nalezněte maximální intervaly, na kterých je funkce $f(x) = x^2 - 2e^x$ konvexní či konkávní, a nalezněte inflexní body grafu této funkce.

Řešení. Opět platí, že je daná funkce definovaná pro $x \in \mathbf{R}$. První derivace je $f'(x) = 2x - 2e^x$ a druhá $f''(x) = 2 - 2e^x$. Položíme-li druhou derivaci rovnu nule, je $e^x = 1$ a z toho $x = 0$. Funkce je konvexní na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a konkávní na intervalu $\langle 0, \infty)$. Inflexním bodem grafu funkce je $I = [0, -2]$.

EXTRÉMY FUNKCÍ DVOU PROMĚNNÝCH

Příklad 1. Určete, ve kterých bodech má funkce $f(x,y) = x^3 + y^2 - 4xy + 2x + y$ lokální extrémy a jakého jsou druhu.

Řešení. Definičním oborem funkce je $D(f) = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Funkce $f(x,y)$ má ve všech bodech definičního oboru parciální derivace podle obou proměnných, a proto může mít tato funkce lokální extrémy pouze v bodech, ve kterých jsou obě první parciální derivace rovny nule. Vypočteme parciální derivace a dostaneme: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-4y+2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y-4x+1$. Obě derivace položíme rovny nule a řešíme soustavu rovnic $3x^2-4y+2=0$ a $2y-4x+1=0$. Z druhé rovnice $2y = 4x-1$ dosadíme do rovnice první a po úpravě získáme kvadratickou rovnici $3x^2-8x+4=0$, jejíž kořeny jsou $x_1 = 2$ a $x_2 = \frac{2}{3}$, pak $y_1 = \frac{7}{2}$, $y_2 = \frac{5}{6}$. Má-li funkce lokální extrémy, pak jedině v bodech $A = (2, \frac{7}{2})$ nebo $B = (\frac{2}{3}, \frac{5}{6})$. Vypočteme druhé derivace funkce $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$. Je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 2$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = -4$, a dále $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) = 2$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) = -4$. Dosadíme do výrazu $D(A) = 12\cdot 2-(-4)^2 = 8 > 0$, funkce má v bodě A lokální extrém. Protože je zároveň $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$, má funkce v bodě $A = (2, \frac{7}{2})$ lokální ostré minimum. V bodě B je $D(B) = 4\cdot 2-(-4)^2 = -8 < 0$. Funkce nemá v bodě B lokální extrém.

Příklad 2. Určete, ve kterých bodech má funkce $f(x,y) = \frac{x^2+4}{y^2-8}$ lokální extrémy a jakého jsou druhu.

Řešení. Funkce je definovaná pro $x \in \mathbf{R}$ a $y \in \mathbf{R}\setminus\{\pm 2\sqrt{2}\}$. Funkce $f(x,y)$ má ve všech bodech definičního oboru parciální derivace podle obou proměnných, a proto může mít tato funkce lokální extrémy pouze v bodech, ve kterých jsou obě parciální derivace rovny nule. Vypočteme parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y^2-8}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y(x^2+4)}{(y^2-8)^2}$ a položíme je rovny nule. Vzniklá soustava rovnic $\frac{2x}{y^2-8} = 0$ a $\frac{-2y(x^2+4)}{(y^2-8)^2} = 0$ má řešení $x = 0$, $y = 0$, řešením soustavy je tedy bod $(0,0)$. Druhé parciální derivace jsou $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{y^2-8}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2(x^2+4)(y^2-8)^2+4y(x^2+4)(y^2-8)\cdot 2y}{(y^2-8)^4} = \frac{6x^2y^2+24y^2+16x^2+64}{(y^2-8)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(y^2-8)^2}$. Po dosazení dostaneme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{1}{4}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{1}{8}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$ a $D(0,0) = -\frac{1}{4}(-\frac{1}{8}) - 0 > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) < 0$. Funkce má lokální ostré maximum v bodě $(0,0)$.

Příklad 3. Nalezněte body, ve kterých má funkce $f(x,y) = x^4 + 2x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 3$ lokální extrémy a určete, jakého jsou druhu.

Řešení. Definičním oborem funkce je $D(f) = \mathbf{R}\times\mathbf{R}$. Funkce $f(x,y)$ má ve všech bodech definičního oboru parciální derivace podle obou proměnných, a proto může mít tato funkce lokální extrémy pouze v bodech, ve kterých jsou obě parciální derivace rovny nule. Určeme si tedy nejprve obě parciální derivace. Je $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 4xy + 4x$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 4y$. Řešme soustavu rovnic $4x^3 + 4xy + 4x = 0$ a $2x^2 + 4y = 0$. Z první rovnice $4x(x^2 + y + 1) = 0$ dostáváme, že musí být $x = 0$ nebo $x^2 + y + 1 = 0$. Pokud je $x = 0$, pak z druhé rovnice dostáváme $y = 0$. Není-li $x = 0$, pak je $x^2 + y + 1 = 0$, a tedy $y = -1 - x^2$. Dosazením tohoto vztahu do druhé rovnice dostaneme rovnici $-4 - 2x^2 = 0$, která nemá v oboru reálných čísel řešení. Soustava rovnic má proto pouze jediné řešení, a to bod $(0,0)$. Abychom potvrdili existenci lokálního extrému, musíme si

určit hodnoty všech parciálních derivací druhého řádu. Je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 4y + 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x$. Po dosazení $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$. Protože je $D(0,0) = 4 \cdot 4 - 0^2 > 0$, má funkce $f(x,y)$ v bodě $(0,0)$ ostrý lokální extrém, a protože platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) > 0$, jedná se o ostré lokální minimum.

Příklad 4. Nalezněte body, ve kterých má funkce $f(x,y) = 8x^3 + y^3 - 6xy$ lokální extrémy a určete, jakého jsou druhu.

Řešení. Definičním oborem funkce je $D(f) = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Funkce $f(x,y)$ má ve všech bodech parciální derivace podle obou proměnných, a proto může mít tato funkce lokální extrémy pouze v bodech, ve kterých jsou obě parciální derivace rovny nule. Určeme si tedy nejprve obě parciální derivace. Je $\frac{\partial f}{\partial x} = 24x^2 - 6y$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 6x$. Řešme proto soustavu rovnic $24x^2 - 6y = 0$ a $3y^2 - 6x = 0$. Z první rovnice $6(4x^2 - y) = 0$ vyjádříme proměnnou $y = 4x^2$. Toto dosadíme do druhé rovnice a dostaneme rovnici $3(4x^2)^2 - 6x = 0$. Odsud ihned plyne $48x^4 - 6x = 0$, tj. $6x(8x^3 - 1) = 0$. Tato rovnice má dva kořeny, a to $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{1}{2}$. Těmto kořenům odpovídají postupně $y_1 = 0$ a $y_2 = 1$. Soustava rovnic má tedy dvě řešení, a to body $A = (0,0)$ a $B = (\frac{1}{2}, 1)$. Abychom potvrdili existenci lokálního extrému, musíme si určit hodnoty všech parciálních derivací druhého řádu. Je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 48x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6$. Dále snadno určíme, že je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) = -6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = 24$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) = 6$. Protože je $D(A) = 0 \cdot 0 - (-6)^2 < 0$, nemá funkce $f(x,y)$ v bodě $A = (0,0)$ žádný lokální extrém. Protože je $D(B) = 24 \cdot 6 - (-6)^2 > 0$, má daná funkce $f(x,y)$ v bodě $B = (\frac{1}{2}, 1)$ ostrý lokální extrém, a protože je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) > 0$, jedná se o ostré lokální minimum.

Příklad 5. Nalezněte body, ve kterých má funkce $f(x,y) = y - \frac{1}{3}x^3 + \ln(x - y)$ lokální extrémy a určete, jakého jsou druhu.

Řešení. Definičním oborem funkce je $D(f) = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ x - y > 0\}$. Funkce $f(x,y)$ má ve všech bodech definičního oboru parciální derivace podle obou proměnných, a proto může mít tato funkce lokální extrémy pouze v bodech, ve kterých jsou obě parciální derivace rovny nule. Určeme si tedy nejprve obě parciální derivace. Je $\frac{\partial f}{\partial x} = -x^2 + \frac{1}{x-y}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 1 - \frac{1}{x-y}$. Řešme proto soustavu rovnic $-x^2 + \frac{1}{x-y} = 0$ a $1 - \frac{1}{x-y} = 0$. Sečteme-li obě rovnice, dostaneme $-x^2 + 1 = 0$. Řešením jsou kořeny $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$. Těmto kořenům odpovídají $y_1 = 0$ a $y_2 = -2$. Soustava rovnic má tedy dvě řešení, a to body $A = (1,0)$ a $B = (-1,-2)$. Oba body patří do definičního oboru funkce. Abychom ověřili existenci lokálního extrému, musíme určit hodnoty všech parciálních derivací druhého řádu. Je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2x - \frac{1}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x-y)^2}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(x-y)^2}$. Dále určíme, že je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 1$ a dále $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) = -1$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) = 1$. Protože je $D(A) = -3 \cdot (-1) - 1^2 = 2 > 0$, má funkce $f(x,y)$ v bodě $A = (1,0)$ lokální extrém. A protože je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$, jedná se o ostré lokální maximum. Protože je $D(B) = 1 \cdot (-1) - 1^2 = -2 < 0$, nemá daná funkce $f(x,y)$ v bodě $B = (-1,-2)$ lokální extrém.

Příklad 6. Nalezněte body, ve kterých má funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 - 2x + y^2 + 4y + 6}$ lokální extrémy a určete, jakého jsou druhu.

Řešení. Definičním oborem funkce je $D(f) = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Funkce $f(x,y)$ má ve všech bodech definičního oboru parciální derivace podle obou proměnných, a proto může mít tato funkce lokální extrémy pouze v bodech, ve kterých jsou obě parciální derivace rovny nule. Určeme si tedy nejprve obě parciální derivace. Je $\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{x^2-2x+y^2+4y+6}(2x-2)$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^2-2x+y^2+4y+6}(2y+4)$. Řešme proto soustavu rovnic $\mathrm{e}^{x^2-2x+y^2+4y+6}(2x-2) = 0$ a $\mathrm{e}^{x^2-2x+y^2+4y+6}(2y+4) = 0$. Výraz $\mathrm{e}^{x^2-2x+y^2+4y+6}$ je vždy kladný, řešíme tedy soustavu rovnic $2x-2=0$ a $2y+4=0$. Řešením je bod $A=(1,-2)$. Abychom ověřili existenci lokálního extrému, musíme určit hodnoty všech parciálních derivací druhého řádu. Je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{x^2-2x+y^2+4y+6}(2x-2)^2 + 2\mathrm{e}^{x^2-2x+y^2+4y+6}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{x^2-2x+y^2+4y+6}(2y+4)^2 + 2\mathrm{e}^{x^2-2x+y^2+4y+6}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \mathrm{e}^{x^2-2x+y^2+4y+6}(2y+4)(2x-2)$. Dále snadno určíme, že je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 2\mathrm{e}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 2\mathrm{e}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 0$. Protože je $D(A) = 2\mathrm{e} \cdot 2\mathrm{e} - 0 = 4\mathrm{e}^2 > 0$, má funkce $f(x,y)$ v bodě $A=(1,-2)$ lokální extrém. A protože je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$, jedná se o ostré lokální minimum.

Příklad 7. Nalezněte body, ve kterých má funkce $f(x,y) = \arcsin(x^2+y^2-3)$ lokální extrémy a určete, jakého jsou druhu.

Řešení. Definičním oborem funkce je $D(f) = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ -1 \le x^2+y^2-3 \le 1\}$, viz. obr. 9A. Funkce $f(x,y)$ má ve všech bodech definičního oboru parciální derivace podle obou proměnných, a proto může mít tato funkce lokální extrémy pouze v bodech, ve kterých jsou obě parciální derivace rovny nule. Je $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y^2-3)^2}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{1-(x^2+y^2-3)^2}}$. Řešením je $x=0$ a $y=0$, tedy bod $(0,0)$. Tento bod neleží v definičním oboru dané funkce, nemůže v něm proto být extrém funkce. Funkce $f(x,y)$ nemá lokální extrémy.

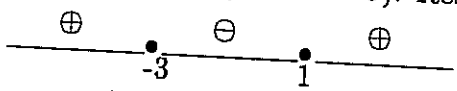
Příklad 8. Nalezněte body, ve kterých má funkce $f(x,y) = 3x + 2y^2 - 3\ln x - \ln y$ lokální extrémy a určete, jakého jsou druhu.

Řešení. Definičním oborem funkce je $D(f) = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R};\ x > 0,\ y > 0\}$. Funkce $f(x,y)$ má ve všech bodech definičního oboru parciální derivace podle obou proměnných, a proto může mít tato funkce lokální extrémy pouze v bodech, ve kterých jsou obě parciální derivace rovny nule. Určeme si tedy nejprve obě parciální derivace. Je $\frac{\partial f}{\partial x} = 3 - \frac{3}{x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y - \frac{1}{y}$. Řešme proto soustavu rovnic $3 - \frac{3}{x} = 0$ a $4y - \frac{1}{y} = 0$, po úpravě $3x - 3 = 0$ a $4y^2 - 1 = 0$. Řešením první rovnice je kořen $x = 1$. Řešením druhé rovnice jsou kořeny $y_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. Soustava rovnic má tedy dvě řešení, a to body $A = (1, \frac{1}{2})$ a $B = (1, -\frac{1}{2})$. Bod B neleží v definičním oboru funkce, funkce v něm tedy nemůže mít extrém. Abychom ověřili existenci lokálního extrému v bodě A, musíme určit hodnoty všech parciálních derivací druhého řádu. Je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{3}{x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 + \frac{1}{y^2}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$. Dále snadno určíme, že je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 8$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 0$. Protože je $D(A) = 3 \cdot 8 - 0 = 24 > 0$, má funkce $f(x,y)$ v bodě $A = (1, \frac{1}{2})$ lokální extrém. A protože je $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$, jedná se o ostré lokální minimum.

VÁZANÉ EXTRÉMY

Příklad 1. Nalezněte body, ve kterých má funkce $f(x,y) = x^3 + 3y^2$ vázané extrémy vzhledem k vazební podmínce $2x - 2y - 3 = 0$. Určete typ extrému.

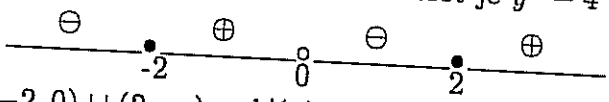
Řešení. Z vazební podmínky můžeme vyjádřit jednu proměnnou, proto použijeme dosazovací metodu. Například $y = x - \frac{3}{2}$ dosadíme do funkčního předpisu funkce $f(x,y)$. Tím dostáváme funkci jedné proměnné $h(x) = f(x, x - \frac{3}{2}) = x^3 + 3\,(x - \frac{3}{2})^2 = x^3 + 3x^2 - 9x + \frac{27}{4}$. Nyní vyšetříme extrémy této funkce jedné proměnné. Funkce $h(x)$ má v každém bodě derivaci, a proto může mít extrémy pouze v bodech, ve kterých je její derivace rovna nule. Je $h'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3\,(x^2 + 2x - 3)$. Řešením rovnice $h'(x) = 0$ dostaneme $x_1 = -3$ a $x_2 = 1$.



Jelikož je $h'(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$ a $h'(x) < 0$ pro $(-3, 1)$, má funkce $h(x)$ v bodě $x = -3$ ostré lokální maximum a v bodě $x = 1$ ostré lokální minimum. Funkce $h(x)$ nemá absolutní extrémy ($\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ a $\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = \infty$). Dosazením $x_1 = -3$, resp. $x_2 = 1$, do vazební podmínky dopočítáme $y_1 = -\frac{9}{2}$, resp. $y_2 = -\frac{1}{2}$. Funkce $f(x,y)$ má v bodě $(-3, -\frac{9}{2})$ ostré vázané lokální maximum a v bodě $(1, -\frac{1}{2})$ ostré vázané lokální minimum (vzhledem k podmínce $2x - 2y - 3 = 0$). Absolutní vázané extrémy funkce $f(x,y)$ nemá.

Příklad 2. Nalezněte body, ve kterých má funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ vázané extrémy vzhledem k vazební podmínce $xy - 4 = 0$. Určete typ extrému.

Řešení. Z vazební podmínky vyjádříme jednu proměnnou, např. $x = \frac{4}{y}$, a tu dosadíme do funkčního předpisu funkce $f(x,y)$. Tím dostáváme funkci jedné proměnné $h(y) = f(\frac{4}{y}, y) = \frac{16}{y^2} + y^2$. Nyní vyšetříme extrémy této funkce jedné proměnné. Funkce $h(y)$ má definiční obor $D(h) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Jelikož má funkce $h(y)$ v každém bodě svého definičního oboru derivaci, může mít extrémy pouze v bodech, ve kterých je její derivace rovna nule. Je $h'(y) = -\frac{32}{y^3} + 2y = \frac{2y^4 - 32}{y^3}$. Z rovnice $h'(y) = 0$ plyne $2y^4 - 32 = 0$, tj. $y^4 - 16 = 0$, tedy $(y^2 - 4)(y^2 + 4) = 0$. Jediná možnost je $y^2 - 4 = 0$, a tedy $y_1 = 2$ nebo $y_2 = -2$.

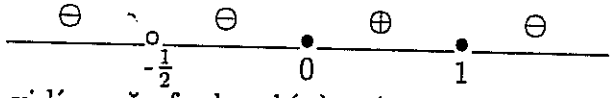


Jelikož je $h'(y) > 0$ na $(-2, 0) \cup (2, \infty)$ a $h'(y) < 0$ na $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$, má funkce $h(y)$ v bodech $y = -2$ a $y = 2$ ostré lokální minimum. V těchto bodech má funkce $h(y)$, jak lze snadno ukázat ($h(2) = h(-2)$), neostré absolutní minimum. Proto má funkce $f(x,y)$ v bodech $(-2, -2)$ a $(2, 2)$ ostré vázané lokální minimum a zároveň neostré vázané absolutní minimum (vzhledem k vazební podmínce $xy - 4 = 0$).

Příklad 3. Nalezněte body, ve kterých má funkce $f(x,y) = \frac{x^2}{y^3}$ vázané extrémy vzhledem k vazební podmínce $y - 2x - 1 = 0$. Určete typ extrému.

Řešení. Funkce $f(x,y)$ je definovaná pro všechna $x \in \mathbf{R}$ a všechna $y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Z vazební podmínky vyjádříme například $y = 2x + 1$, dosadíme do funkčního předpisu a dostaneme $h(x) = f(x, 2x + 1) = \frac{x^2}{(2x+1)^3}$, což je funkce jedné reálné proměnné s definičním oborem $D(h) = \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$. Funkci zderivujeme: $h'(x) = \frac{2x(2x+1)^3 - x^2 \cdot 3(2x+1)^2 \cdot 2}{(2x+1)^6} = \frac{2x - 2x^2}{(2x+1)^4}$. Řešíme rovnici $\frac{2x - 2x^2}{(2x+1)^4} = 0$, tedy $2x\,(1 - x) = 0$. Kořeny rovnice jsou $x = 0$ nebo $x = 1$.

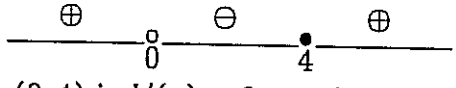
Tyto vypočtené body, krajní body definičního oboru a znaménka derivace v jednotlivých intervalech opět graficky znázorníme.



Ze schematu vidíme, že funkce $h(x)$ má v bodě $x = 0$ ostré lokální minimum a v bodě $x = 1$ ostré lokální maximum. Funkce $h(x)$ nemá absolutní extrémy, protože platí $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^+} h(x) = +\infty$ a $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}^-} h(x) = -\infty$. Funkce $f(x, y)$ má ostré vázané lokální maximum v bodě $(1, 3)$ a ostré vázané lokální minimum v bodě $(0, 1)$. Funkce nemá absolutní vázané extrémy.

Příklad 4. Nalezněte body, ve kterých má funkce $f(x, y) = \frac{2}{x^2} + \frac{3}{y^2}$ vázané extrémy vzhledem k vazební podmínce $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{5}{12} = 0$. Určete typ extrému.

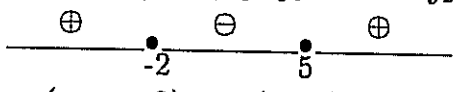
Řešení. Musí být splněny podmínky $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Funkční předpis upravíme do tvaru $f(x, y) = \frac{2}{x^2} + 3\left(\frac{1}{y}\right)^2$. Vidíme, že z vazební podmínky stačí vyjádřit jednu proměnnou (např. y) ve tvaru $\frac{1}{y} = \frac{5}{12} - \frac{1}{x}$. Po dosazení do funkčního předpisu funkce $f(x, y)$ dostáváme funkci jedné proměnné $h(x) = \frac{2}{x^2} + 3\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{x}\right)^2$. Nyní vyšetříme extrémy této funkce jedné proměnné. Funkce $h(x)$ má definiční obor $D(h) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, a jelikož má funkce $h(x)$ v každém bodě svého definičního oboru derivaci, může mít extrémy pouze v bodech, ve kterých je její derivace rovna nule. Je $h'(x) = -\frac{4}{x^3} + 6\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{5x-20}{2x^3}$. Z rovnice $h'(x) = 0$ plyne $5x - 20 = 0$, tj. $x = 4$.



Jelikož na intervalu $(0, 4)$ je $h'(x) < 0$ a na intervalu $(4, \infty)$ je $h'(x) > 0$, má funkce $h(x)$ v bodě $x = 4$ ostré lokální minimum. Funkce $h(x)$ má v tomto bodě i absolutní ostré minimum (snadno ukážeme, že $h(4) = \frac{10}{48}$ je menší než $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \frac{25}{48}$). Dosazením $x = 4$ do vazební podmínky dopočítáme $y = 6$. Funkce $f(x, y)$ má tedy v bodě $(4, 6)$ ostré vázané lokální i absolutní minimum (vzhledem k vazební podmínce $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{5}{12} = 0$).

Příklad 5. Nalezněte body, ve kterých má funkce $f(x, y) = 2y^3 + 9x^2 - 60y - 40$ vázané lokální extrémy vzhledem k vazební podmínce $x - \sqrt{5 - y^2} = 0$. Určete typ extrému.

Řešení. Musí platit $y \in \langle -\sqrt{5}, +\sqrt{5} \rangle$. Z vazební podmínky vyjádříme $x = \sqrt{5 - y^2}$. Po dosazení do funkčního předpisu funkce $f(x, y)$ dostáváme funkci jedné proměnné $h(y) = 2y^3 + 9(5 - y^2) - 60y - 40 = 2y^3 - 9y^2 - 60y + 5$. Nyní vyšetříme extrémy této funkce jedné proměnné. Funkce $h(y)$ má definiční obor $D(h) = \mathbf{R}$, a jelikož má funkce $h(y)$ v každém bodě svého definičního oboru derivaci, může mít extrémy pouze v bodech, ve kterých je její derivace rovna nule. Je $h'(y) = 6y^2 - 18y - 60 = 6(y^2 - 3y - 10)$. Z rovnice $h'(y) = 0$ plyne $(y + 2)(y - 5) = 0$, tj. $y_1 = -2$ a $y_2 = 5$.



Jelikož je $h'(y) > 0$ na $(-\infty, -2)$ a na $(5, \infty)$, $h'(y) < 0$ na $(-2, 5)$, má funkce $h(y)$ v bodě $y_1 = -2$ ostré lokální maximum a v bodě $y_2 = 5$ ostré lokální minimum. Dosazením těchto bodů do vazební podmínky dostaneme $x^2 = 1$ a $x^2 = -20$. Řešením první rovnice je $x = \pm 1$, druhá rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení. Funkce $f(x, y)$ má tedy v bodech $(1, -2)$ a $(-1, -2)$ ostré vázané lokální maximum.

Příklad 6. Určete body, ve kterých má funkce $f(x,y) = 5 - x^2 - y^2$ vázané lokální extrémy vzhledem k vazební podmínce $\ln x + \ln y - 4 = 0$. Určete typ extrému.

Řešení. Z vazební podmínky bychom sice mohli některou proměnnou vyjádřit, ale bylo by to již komplikovanější, použijeme proto k výpočtu vázaných extrémů Lagrangeovu metodu. Vytvoříme funkci $L(x,y) = 5 - x^2 - y^2 + \lambda(\ln x + \ln y - 4)$, která je definovaná pro $x > 0$, $y > 0$. Vypočteme první parciální derivace funkce $L(x,y)$ podle proměnných x a y. $\frac{\partial L}{\partial x} = -2x + \frac{\lambda}{x}$, $\frac{\partial L}{\partial y} = -2y + \frac{\lambda}{y}$. Funkce $L(x,y)$ má parciální derivace ve všech bodech definičního oboru, může mít tedy lokální extrémy pouze v bodech, kde se obě první parciální derivace rovnají nule. Dostáváme, spolu s vazební podmínkou, soustavu rovnic: $-2x + \frac{\lambda}{x} = 0$, $-2y + \frac{\lambda}{y} = 0$, $\ln x + \ln y - 4 = 0$. Z prvních dvou rovnic plyne, že $x^2 = y^2$, tedy $y = \pm x$. Vzhledem k definičnímu oboru $y = -x$ nevyhovuje. Do třetí rovnice dosadíme $y = x$, potom $2\ln x = 4$, tj. $x = \mathrm{e}^2$. Dopočítáme $y = \mathrm{e}^2$, $\lambda = 2\mathrm{e}^4$. Funkce $L(x,y)$ může mít lokální extrém v bodě $(\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2)$ pro $\lambda = 2\mathrm{e}^4$. Druhé parciální derivace jsou: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2 - \frac{\lambda}{x^2}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2 - \frac{\lambda}{y^2}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$. Vypočteme výraz $D(\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2) = -4 \cdot (-4) - 0 = 16 > 0$, funkce $L(x,y)$ má v bodě $(\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2)$ lokální extrém. Protože je $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2) = -4 < 0$, má funkce $L(x,y)$ v tomto bodě ostré lokální maximum. Funkce $f(x,y)$ má tedy ostré vázané lokální maximum v bodě $(\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^2)$.

Příklad 7. Určete body, ve kterých má funkce $f(x,y) = x + y$ vázané lokální extrémy vzhledem k vazební podmínce $x^3 + y^3 - 2 = 0$. Určete typ extrému.

Řešení. Řešme Lagrangeovou metodou. Příslušná Lagrangeova funkce je $L(x,y) = x + y + \lambda(x^3 + y^3 - 2)$, která je definovaná pro $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. Funkce $L(x,y)$ má parciální derivace ve všech bodech definičního oboru, a proto může mít lokální extrémy pouze v bodech, kde se obě první parciální derivace rovnají nule. Je $\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 3\lambda x^2$ a $\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 3\lambda y^2$. Dostáváme tedy, spolu s vazební podmínkou, tuto soustavu rovnic: $1 + 3\lambda x^2 = 0$, $1 + 3\lambda y^2 = 0$, $x^3 + y^3 = 2$. Z prvních dvou rovnic dostaneme $x^2 = y^2$, tedy $y = \pm x$. Dosazením do třetí rovnice zjistíme, že pro $y = -x$ nemá soustava rovnic řešení, dosazením $y = x$ získáme $x = 1$, $y = 1$ a $\lambda = -\frac{1}{3}$. Řešením soustavy rovnic je tedy bod $(1,1)$ pro $\lambda = -\frac{1}{3}$. Určeme parciální derivace druhého řádu: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 6\lambda x$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 6\lambda y$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$. V bodě $(1,1)$ (a $\lambda = -\frac{1}{3}$) dostaneme $D(1,1) = -2 \cdot (-2) - 0 = 4 > 0$, funkce $L(x,y)$ má v bodě $(1,1)$ lokální extrém. Protože je $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(1,1) = -2 < 0$, má funkce $L(x,y)$ v tomto bodě ostré lokální maximum. Funkce $f(x,y)$ má tedy vzhledem k podmínce $x^3 + y^3 - 2 = 0$ ostré vázané lokální maximum.

Příklad 8. Určete body, ve kterých má funkce $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ vázané lokální extrémy vzhledem k vazební podmínce $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} = 0$. Určete typ extrému.

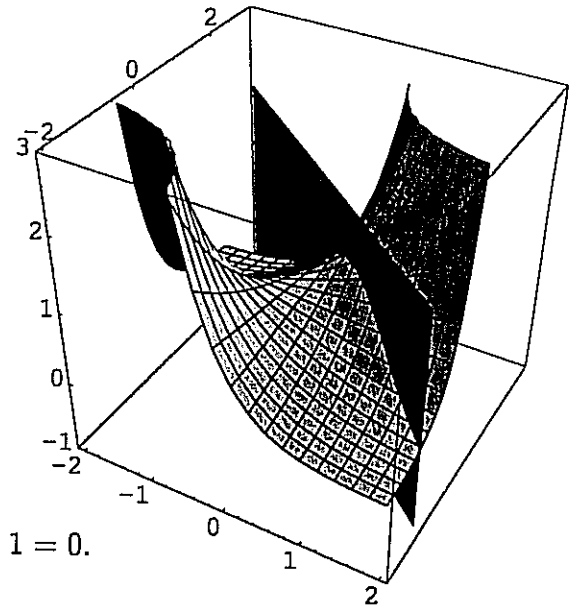
Řešení. Řešme Lagrangeovou metodou. Příslušná Lagrangeova funkce je $L(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \lambda(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2})$, která je definovaná pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, $y \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Funkce $L(x,y)$ má parciální derivace ve všech bodech definičního oboru, a proto může mít lokální extrémy pouze v bodech, kde se obě první parciální derivace rovnají nule. Je $\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} - \frac{2\lambda}{x^3}$ a $\frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3}$. Dostáváme tedy, spolu s vazební podmínkou, soustavu rovnic: $-\frac{1}{x^2} - \frac{2\lambda}{x^3} = 0$, $-\frac{1}{y^2} - \frac{2\lambda}{y^3} = 0$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$. Z první rovnice vyjádříme $x = -2\lambda$, z druhé $y = -2\lambda$ a oba výrazy dosadíme do třetí rovnice. Jejím řešením je $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Snadno dopočítáme příslušná x a y. Řešením této soustavy rovnic jsou body $(-2,-2)$

pro $\lambda = 1$ a $(2,2)$ pro $\lambda = -1$. Určeme parciální derivace druhého řádu: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3} + \frac{6\lambda}{x^4}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = \frac{2}{y^3} + \frac{6\lambda}{y^4}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$. V bodě $(-2,-2)$ (a $\lambda = 1$) dostaneme $D(-2,-2) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} - 0 = \frac{1}{64} > 0$, funkce $L(x,y)$ má v bodě $(-2,-2)$ lokální extrém. Protože je $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(-2,-2) > 0$, má funkce $L(x,y)$ v tomto bodě ostré lokální minimum. V bodě $(2,2)$ (a $\lambda = -1$) dostaneme $D(2,2) = -\frac{1}{8} \cdot (-\frac{1}{8}) - 0 = \frac{1}{64} > 0$, funkce $L(x,y)$ má v bodě $(2,2)$ lokální extrém. Protože je $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(2,2) < 0$, má funkce $L(x,y)$ v tomto bodě ostré lokální maximum. Funkce $f(x,y)$ má tedy vzhledem k podmínce $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{2} = 0$ ostré vázané lokální minimum v bodě $(-2,-2)$ a ostré vázané lokální maximum v bodě $(2,2)$.

Příklad 9. Určete body, ve kterých má funkce $f(x,y) = e^{xy}$ vázané lokální extrémy vzhledem k vazební podmínce $x + y - 1 = 0$. Řešte Lagrangeovou metodou.

Řešení. Příslušná Lagrangeova funkce je $L(x,y) = e^{xy} + \lambda(x+y-1)$, která je definovaná pro $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$. Funkce $L(x,y)$ má parciální derivace ve všech bodech definičního oboru, a proto může mít lokální extrémy pouze v bodech, kde se obě první parciální derivace rovnají nule. Je $\frac{\partial L}{\partial x} = ye^{xy} + \lambda$ a $\frac{\partial L}{\partial y} = xe^{xy} + \lambda$. Dostáváme tedy, spolu s vazební podmínkou, tuto soustavu rovnic: $ye^{xy} + \lambda = 0$, $xe^{xy} + \lambda = 0$, $x + y = 1$. Od první rovnice odečteme druhou rovnici, dostaneme $e^{xy}(y - x) = 0$, a protože $e^{xy} > 0$ pouze $y = x$. Dosazením do třetí rovnice získáme $y = x = \frac{1}{2}$. Řešením soustavy rovnic je tedy bod $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pro $\lambda = -\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}}$. Určeme parciální derivace druhého řádu: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = xye^{xy} + e^{xy}$. V bodě $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dostaneme $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{5}{4}e^{\frac{1}{4}}\right)^2 = -\frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}} < 0$, funkce $L(x,y)$ tedy nemá lokální extrémy.

Ale pozor, nemá-li funkce $L(x,y)$ v nějakém bodě extrém, funkce $f(x,y)$ v tomto bodě mít extrém může, jak se přesvědčíme dosazovací metodou. Například výraz $y = 1 - x$ dosadíme do funkčního předpisu a dostaneme $h(x) = f(x, 1-x) = e^{x-x^2}$, což je funkce jedné reálné proměnné s definičním oborem $D(h) = \mathbf{R}$. Funkci zderivujeme: $h'(x) = e^{x-x^2}(1 - 2x)$. Protože je $h'(x) = 0$ pro $x = \frac{1}{2}$, $h'(x) > 0$ na intervalu $(-\infty, \frac{1}{2})$ a $h'(x) < 0$ na intervalu $(\frac{1}{2}, \infty)$ má funkce $h(x)$ v bodě $x = \frac{1}{2}$ ostré lokální maximum, funkce $f(x,y)$ má v bodě $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ostré vázané lokální maximum.



Obr.12 Plochy $f(x,y) = e^{xy}$ a $x + y - 1 = 0$.

PRŮBĚH FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Příklad 1. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^2}{9-x^2}$ a nakreslete její graf.

Řešení. Definičním oborem dané funkce je množina $\mathbf{R}\setminus\{-3,3\}$. Důležitými body grafu jsou průsečíky s osami souřadnými. Dosazením za $y = 0$ do funkčního předpisu dostaneme $x = 0$, to jest bod $[0,0]$ je jediným průsečíkem. Dále zjistěme, zda je funkce sudá či lichá. Je-li $f(x) = \frac{x^2}{9-x^2}$, pak $f(-x) = \frac{(-x)^2}{9-(-x)^2} = \frac{x^2}{9-x^2} = f(x)$. Podle definice je to funkce sudá, to znamená, že její graf je souměrný podle osy y.
Nyní určíme derivaci funkce $f'(x) = \frac{2x(9-x^2)-x^2(-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{18x}{(9-x^2)^2}$. První derivace je rovna nule v bodě $x = 0$ a snadno zjistíme, že je $f'(x) > 0$ pro kladná x a $f'(x) < 0$ pro záporná x. To znamená, že funkce je rostoucí na intervalech $\langle 0,3)$ a $(3,\infty)$ a klesající na intervalech $(-\infty,-3)$ a $(-3,0\rangle$. Funkce má ostré lokální minimum v bodě $x = 0$.
Druhá derivace je $f''(x) = \frac{18(9-x^2)^2-18x\cdot 2(9-x^2)(-2x)}{(9-x^2)^4} = \frac{18(9-x^2)+72x^2}{(9-x^2)^3} = \frac{162+54x^2}{(9-x^2)^3}$. Čitatel zlomku je vždy kladný a jmenovatel je kladný pro $|x| < 3$. Z toho vyplývá, že funkce je konvexní na intervalu $(-3,3)$ a konkávní na intervalech $(-\infty,-3)$ a $(3,\infty)$. Funkce nemá žádný inflexní bod.
Určíme asymptoty grafu funkce (a limity v krajních bodech $D(f)$). K tomu budeme zkoumat limity v bodech $x = \pm 3$. $\lim\limits_{x\to 3+} \frac{x^2}{9-x^2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 3-} \frac{x^2}{9-x^2} = \infty$, $\lim\limits_{x\to -3+} \frac{x^2}{9-x^2} = \infty$, $\lim\limits_{x\to -3-} \frac{x^2}{9-x^2} = -\infty$. To jsou cenné údaje pro sestrojení grafu a navíc vidíme, že graf funkce má asymptoty rovnoběžné s osou y o rovnicích $x = -3$ a $x = 3$. Vypočteme $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2}{9-x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{9-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{9}{x^2}-1} = 0$, $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{9-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\frac{9}{x^2}-1} = -1$. Graf funkce má ještě asymptotu o rovnici $y = -1$. Na základě všech těchto vypočtených údajů již můžeme graf funkce snadno sestrojit (viz obr. 11).

Příklad 2. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^4}$ a nakreslete její graf.

Řešení. Definičním oborem funkce je $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Graf funkce nemá průsečíky s osou y. Průsečíky s osou x dostaneme řešením rovnice $2x^2 - 4 = 0$, tj. $x = \pm\sqrt{2}$. Takže body $[\sqrt{2},0]$ a $[-\sqrt{2},0]$ jsou body grafu. Ve funkčním předpisu se vyskytují jen sudé mocniny x, proto je funkce sudá. Toto tvrzení ověříme: $f(-x) = \frac{2}{(-x)^2} - \frac{4}{(-x)^4} = \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^4} = f(x)$. Graf funkce je souměrný podle osy y.
Abychom mohli určit intervaly monotonie dané funkce, vypočtěme nejprve první derivaci: $f'(x) = (2x^{-2} - 4x^{-4})' = -4x^{-3} + 16x^{-5} = -4\left(\frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^5}\right)$. Položíme první derivaci rovnu nule a budeme řešit rovnici $\frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^5} = 0$, z toho $x^2 = 4$ a dále $x = \pm 2$. Ze znamének první derivace v jednotlivých intervalech plyne, že je funkce rostoucí na intervalech $(-\infty,-2\rangle$ a $(0,2\rangle$ a klesající na intervalech $\langle -2,0)$ a $\langle 2,\infty)$. Ostrá lokální maxima má funkce v bodech $x = \pm 2$, $f(2) = f(-2) = \frac{1}{4}$.
Dále vypočteme druhou derivaci: $f''(x) = 12x^{-4} - 80x^{-6} = \frac{12}{x^4} - \frac{80}{x^6}$. Druhá derivace je rovna nule pro $\frac{12x^2-80}{x^6} = 0$, tzn. $3x^2 = 20$, $x = \pm\sqrt{\frac{20}{3}}$, tj. po úpravě $x = \pm\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \pm\frac{2\sqrt{15}}{3}$. Dosazením vhodných čísel do druhé derivace v jednotlivých intervalech zjistíme, že funkce je konvexní na intervalech $\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{15}}{3}\right\rangle$ a $\left\langle\frac{2\sqrt{15}}{3},\infty\right)$ a konkávní na intervalech $\left\langle -\frac{2\sqrt{15}}{3},0\right)$ a $\left(0,\frac{2\sqrt{15}}{3}\right\rangle$. Graf funkce má dva inflexní body, a to body

$I_{1,2} = \left[\pm\frac{2\sqrt{15}}{3}, \frac{21}{100}\right]$. Zkoumejme ještě, zda má graf funkce nějaké asymptoty. Nejprve $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^4}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{x^2}(1 - \frac{2}{x^2})\right) = \infty(1-\infty) = -\infty$. Dále je $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^4}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-4}{x^5} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{5x^4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{20x^3} = 0$ a $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^4}\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-4}{x^4} = 0$. Graf funkce tedy má dvě asymptoty o rovnicích $x = 0$, $y = 0$. Tím jsme zároveň vypočítali limity funkce v krajních bodech $D(f)$. Graf dané funkce je na obr. 12.

Příklad 3. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$ a nakreslete její graf.

Řešení. Definičním oborem funkce je interval $(0,\infty)$. Funkce není ani sudá, ani lichá, protože $D(f)$ není souměrný podle počátku. Nejprve vypočteme průsečíky této funkce s osami souřadnými. Průsečíkem s osou x je bod $[\frac{1}{e}, 0]$. Získáme ho dosazením $y = 0$ do funkčního předpisu. Průsečík s osou y (vzhledem ke svému $D(f)$) funkce nemá.
V dalším kroku hledáme asymptoty grafu funkce (a zároveň limity v krajních bodech $D(f)$): $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}(1+\ln x)\right) = \infty(1-\infty) = -\infty$. Asymptotou je tedy přímka o rovnici $x = 0$ (tj. osa y). Hledáme ještě asymptotu o rovnici $y = kx + q$: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$ a $q = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Asymptotou grafu funkce je také přímka o rovnici $y = 0$ (tj. osa x).
Nyní budeme počítat první a druhou derivaci funkce: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x-(1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$ a $f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2+\ln x\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x+2x\ln x}{x^4} = \frac{2\ln x-1}{x^3}$. První derivaci položíme rovnu nule: tj. rovnice $\frac{\ln x}{x^2} = 0$ má kořen $x = 1$. Ze znamének první derivace plyne, že funkce je rostoucí na intervalu $(0,1\rangle$ a klesající na intervalu $\langle 1,\infty)$. Ostré lokální (i absolutní) maximum má funkce v bodě $x = 1$, $f(1) = 1$. Druhá derivace je rovna nule pro $x = \sqrt{e}$ (protože $\frac{1-2\ln x}{x^3} = 0$, $\ln x = \frac{1}{2}$, $x = \sqrt{e}$). Dosazením vhodných čísel do druhé derivace zjistíme, že funkce je konkávní na intervalu $(0,\sqrt{e}\rangle$ a konvexní na intervalu $\langle\sqrt{e},\infty)$. Graf funkce má jeden inflexní bod, a to bod $[\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}}]$. Nyní již můžeme sestrojit graf funkce (obr. 13).

Příklad 4. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$ a nakreslete její graf.

Řešení. Definičním oborem funkce je množina $\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Funkce není ani sudá, ani lichá, protože $f(-x) = -\frac{1}{x} + x^2 \neq \pm f(x)$. Vypočteme průsečíky s osami souřadnými: průsečík s osou y, (tj. $x = 0$) funkce nemá (vzhledem k $D(f)$), průsečík s osou x vypočteme z rovnice $\frac{1}{x} + x^2 = 0$, $\frac{1+x^3}{x} = 0$, tedy $1 + x^3 = 0$, $x = -1$. Takto získáme bod $[-1, 0]$.
Nyní budeme hledat asymptoty grafu funkce: $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x} + x^2\right) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0-}\left(\frac{1}{x} + x^2\right) = -\infty$, z toho vyplývá, že asymptotou je osa y, tj. přímka o rovnici $x = 0$. Dále $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2} + x\right) = \pm\infty$, proto už graf funkce nemá žádnou další asymptotu. Pro sestrojení grafu potřebujeme ještě $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{x} + x^2\right) = \infty$.

Nyní určíme derivace funkce: $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 2x = \frac{2x^3-1}{x^2}$ a $f''(x) = \frac{6x^2\cdot x^2-(2x^3-1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{6x^4-4x^4+2x}{x^4} = \frac{2x^4+2x}{x^4} = \frac{2(x^3+1)}{x^3}$. První derivaci položíme rovnu nule: $2x^3 - 1 = 0$, $x^3 = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$. Ze znamének první derivace poznáme, že funkce je klesající na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \frac{\sqrt[3]{4}}{2}\rangle$ a rostoucí na intervalu $\langle\frac{\sqrt[3]{4}}{2}, \infty)$. Ostré lokální minimum má v bodě $x = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$, $f(\frac{\sqrt[3]{4}}{2}) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$. Druhá derivace je rovna nule pro $x = -1$

(tj. $2(x^3+1)=0$, $x^3=-1$, $x=-1$). Ze znamének zjistíme, že funkce je konvexní na intervalech $(-\infty,-1\rangle$ a $(0,\infty)$, konkávní na intervalu $\langle -1,0)$. Inflexním bodem grafu funkce je bod $[-1,0]$. Graf této funkce je na obr. 14.

Příklad 5. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\frac{x^3}{3-x^2}$ a nakreslete její graf.

Řešení. Definičním oborem funkce je množina $\mathbf{R}\setminus\{\pm\sqrt{3}\}$. Funkce je lichá, neboť platí $f(-x)=\frac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=-\frac{x^3}{3-x^2}=-f(x)$. Vypočteme průsečíky s osami souřadnými a zjistíme, že funkce prochází počátkem, tj. bodem [0,0].
V dalším kroku najdeme asymptoty grafu funkce: $\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{3}^-}\frac{x^3}{3-x^2}=\infty$ a $\lim\limits_{x\to\pm\sqrt{3}^+}\frac{x^3}{3-x^2}=$ $=-\infty$. Nalezli jsme zatím dvě asymptoty grafu funkce, které jsou rovnoběžné s osou y, tj. přímky o rovnicích $x=\sqrt{3}$ a $x=-\sqrt{3}$. Dalším výpočtem najdeme ještě jednu asymptotu: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{3-x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{\frac{3}{x^2}-1}=-1$, $q=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=$ $=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{3}{x}}{\frac{3}{x^2}-1}=0$, asymptotou je tedy přímka daná rovnicí $y=-x$. Dále $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2}{-2x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{6x}{-2}=\mp\infty$. Dále vypočteme derivace funkce: $f'(x)=\frac{3x^2(3-x^2)-x^3(-2x)}{(3-x^2)^2}=\frac{9x^2-3x^4+2x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}$ a $f''(x)=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2+(9x^2-x^4)2(3-x^2)2x}{(3-x^2)^4}=\frac{(3-x^2)\big((18x-4x^3)(3-x^2)+4x(9x^2-x^4)\big)}{(3-x^2)^4}=$ $=\frac{54x-12x^3-18x^3+4x^5+36x^3-4x^5}{(3-x^2)^3}=\frac{6x(x^2+9)}{(3-x^2)^3}$. Určíme intervaly monotonie. První derivace je rovna nule pro $x=0$ a $x=\pm3$ ($f'(x)=0$ právě když $9x^2-x^4=0$, $x^2(9-x^2)=0$, tj. $x=0$ a $x=\pm3$). Ze znamének první derivace poznáme, že funkce je klesající na $(-\infty,-3\rangle$ a $\langle 3,\infty)$ a rostoucí na intervalech $\langle -3,-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ a $(\sqrt{3},3\rangle$. Funkce má ostré lokální minimum v bodě $x=-3$, $f(-3)=\frac{9}{2}$, a ostré lokální maximum v bodě $x=3$, $f(3)=-\frac{9}{2}$.
Druhá derivace je rovna nule pro $x=0$. Funkce je konvexní na $(-\infty,-\sqrt{3})$ a $\langle 0,\sqrt{3})$, konkávní na $(-\sqrt{3},0\rangle$ a $(\sqrt{3},\infty)$. Inflexním bodem grafu funkce je bod $[0,0]$. Nyní již můžeme sestrojit graf této funkce (obr. 15).

Příklad 6. Vyšetřete průběh funkce $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{3x}{4}-\arccos x$ a nakreslete její graf.

Řešení. Nejprve určíme definiční obor funkce: $-1\le x\le 1$, tj. $D(f)=$ $=\langle -1,1\rangle$. Hodnoty funkce v krajních bodech $D(f)$ jsou $f(1)=\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\doteq 0,82$ a $f(-1)=\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}-\pi\doteq -0,82$. Jediným průsečíkem s osami souřadnými je bod [0,0]. Graf funkce nemá žádné asymptoty.
K určení intervalů monotonie funkce musíme nejprve určit první derivaci: $f'(x)=-\frac{3}{4}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-3\sqrt{1-x^2}+4}{4\sqrt{1-x^2}}$. První derivaci položíme rovnu nule: $-3\sqrt{1-x^2}+4=$ $=0$. Je zřejmé, že pro všechna $x\in D(f)$ je $\sqrt{1-x^2}$ číslo kladné z intervalu $\langle 0,1\rangle$, a tudíž první derivace je vždy kladná. To znamená, že daná funkce je na celém svém definičním oboru rostoucí. Funkce má extrémy pouze v krajních bodech svého $D(f)$, a to absolutní maximum v bodě $x=1$, $f(1)\doteq 0,82$, a absolutní minimum v bodě $x=-1$, $f(-1)\doteq -0,82$.
Pomocí druhé derivace funkce určíme intervaly konvexity a konkávity grafu funkce: $f''(x)=\frac{-\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}$. Druhá derivace je rovna nule pouze pro $x=0$.

Ze znamének druhé derivace v jednotlivých intervalech určíme, že funkce je konvexní na $\langle 0,1\rangle$ a konkávní na $\langle -1,0\rangle$. Inflexním bodem grafu funkce je bod $[0,0]$. Graf této funkce je na obr. 16.

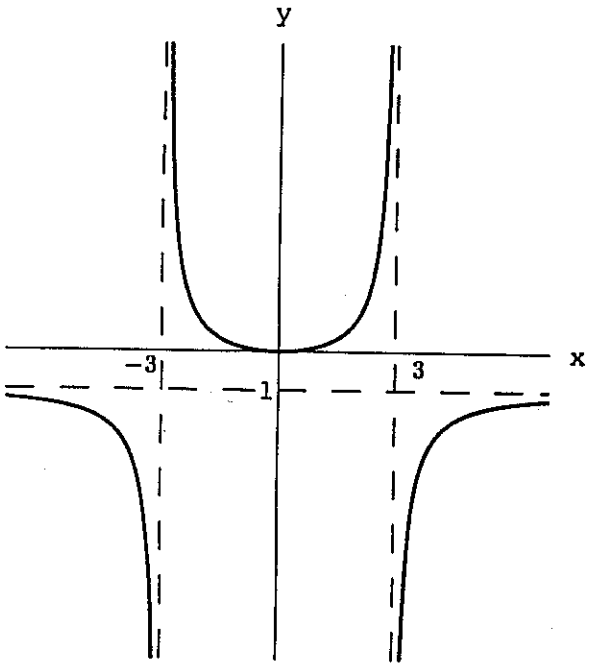
Příklad 7. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ a nakreslete její graf.

Řešení. Definičním oborem funkce je množina $\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Funkce není ani sudá, ani lichá. Daná funkce neprotíná osy souřadné v žádném bodě.
Budeme hledat asymptoty grafu funkce. Nejprve $\lim\limits_{x\to 0^-} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0\cdot 0 = 0$. Limita zleva v bodě $x = 0$ není nevlastní, což by mohlo nasvědčovat tomu, že svislá asymptota v tomto bodě neexistuje. Pro ověření spočítáme ještě limitu zprava: $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \infty$. Tato limita je nevlastní, a proto má graf funkce asymptotu o rovnici $x = 0$. Určíme ještě, zda má graf funkce asymptoty o rovnici $y = kx + q$. Nejprve $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$ a dále $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$. Nalezli jsme ještě asymptotu o rovnici $y = x + 1$. Dále $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \pm\infty$.
Určíme první a druhou derivaci funkce: $f'(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + x(-\frac{1}{x^2})\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{x-1}{x}$ a $f''(x) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x}) + \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}(1 - 1 + \frac{1}{x}) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^3}$. Určíme intervaly monotonie. První derivace je rovna nule pro $x = 1$. Ze znamének první derivace v jednotlivých intervalech vidíme, že na intervalech $(-\infty, 0)$ a $\langle 1, \infty)$ je funkce rostoucí a na intervalu $(0, 1\rangle$ je funkce klesající. V bodě $x = 1$ má funkce ostré lokální minimum, $f(1) = \mathrm{e}$. Z druhé derivace poznáme, že funkce je konkávní na intervalu $(-\infty, 0)$ a konvexní na intervalu $(0, \infty)$ a graf funkce nemá inflexní bod (viz obr. 17).

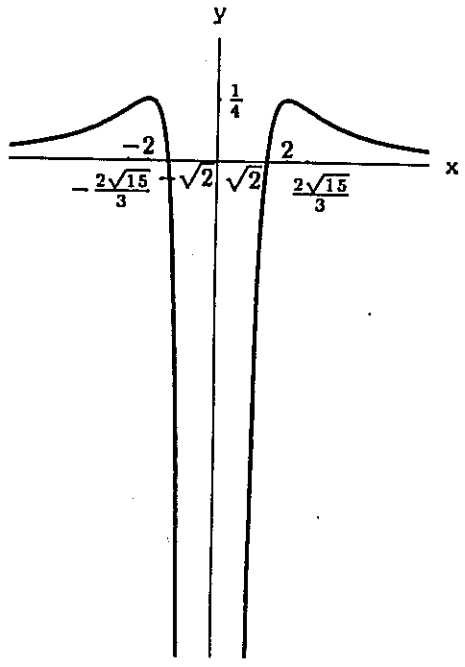
Příklad 8. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^3}{3(x+1)^2}$ a nakreslete její graf.

Řešení. Definičním oborem funkce je množina $\mathbf{R}\backslash\{-1\}$. Funkce není ani sudá, ani lichá. Jediným průsečíkem se souřadnými osami je bod $[0,0]$.

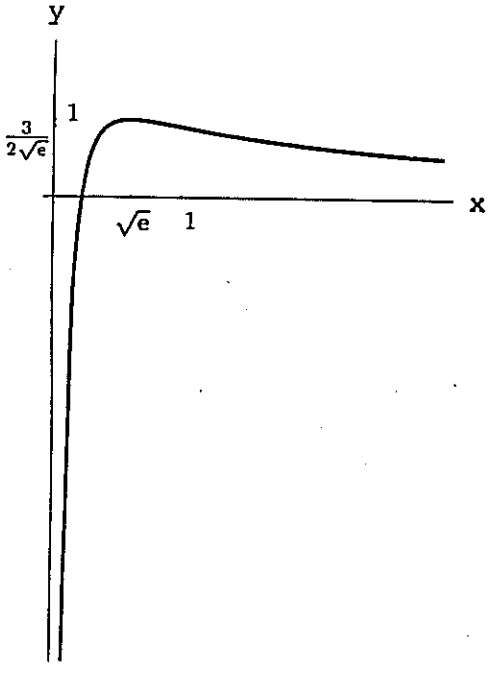
Nyní určíme asymptoty grafu funkce: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3}{3(x+1)^2} = -\infty$; $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^3}{3(x+1)^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{3(x+1)^2} = \frac{1}{3}$ a $q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{3(x+1)^2} - \frac{1}{3}x\right) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x(x+1)^2}{3(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{3(x+1)^2} = -\frac{2}{3}$. Z výpočtu vidíme, že graf funkce má asymptoty o rovnicích $x = -1$ a $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$. Ještě $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{3(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{6(x+1)} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{6x}{6} = \pm\infty$.
Derivace funkce jsou: $f'(x) = \frac{9x^2(x+1)^2 - 6x^3(x+1)}{9(x+1)^4} = \frac{3x^2(x+1)(3(x+1)-2x)}{9(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{3(x+1)^3} = \frac{x^3+3x^2}{3(x+1)^3}$ a $f''(x) = \frac{3(3x^2+6x)(x+1)^3 - 9x^2(x+3)(x+1)^2}{9(x+1)^6} = \frac{9x((x+2)(x+1) - x(x+3))}{9(x+1)^4} = \frac{2x}{(x+1)^4}$. První derivace je rovna nule pro $x = -3$ a $x = 0$. Ze znamének první derivace v jednotlivých intervalech plyne, že funkce je rostoucí na intervalech $(-\infty, -3\rangle$ a $(-1, \infty)$ a klesající na intervalu $\langle -3, -1)$. V bodě $x = -3$ má funkce ostré lokální maximum, $f(-3) = -\frac{9}{4}$. Druhá derivace je rovna nule pro $x = 0$. Opět určíme znaménka a vidíme, že funkce je konkávní na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(-1, 0\rangle$ a konvexní na intervalu $\langle 0, \infty)$. Graf funkce má jeden inflexní bod, a to bod $[0,0]$. Graf je znázorněn na obr. 18.



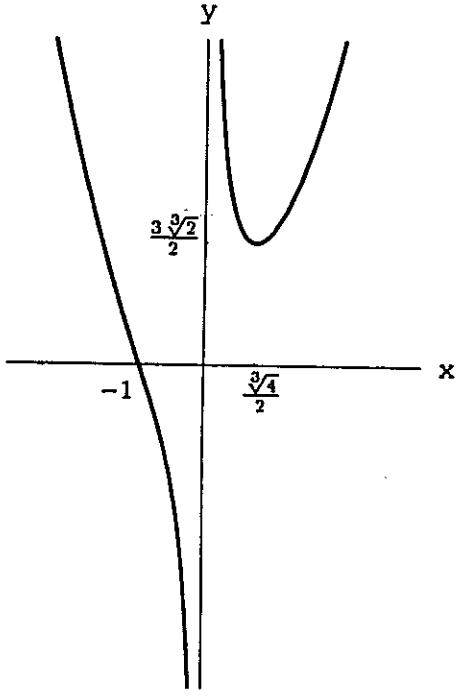
Obr. 13 Graf funkce $f(x) = \frac{x^2}{9-x^2}$



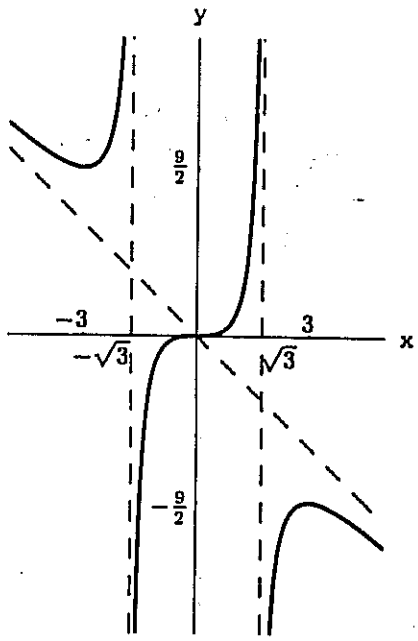
Obr. 14 Graf funkce $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^4}$



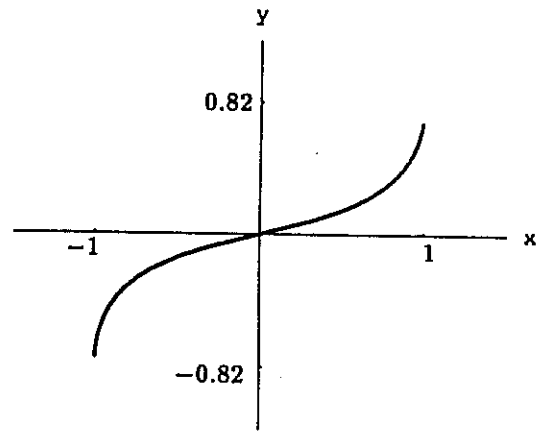
Obr. 15 Graf funkce $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$



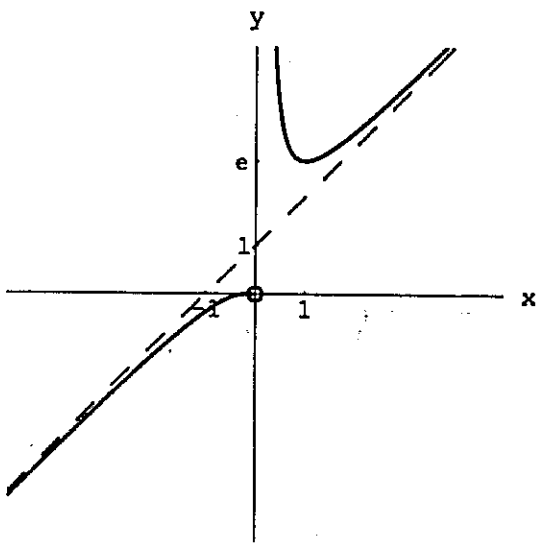
Obr. 16 Graf funkce $f(x) = \frac{1}{x} + x^2$



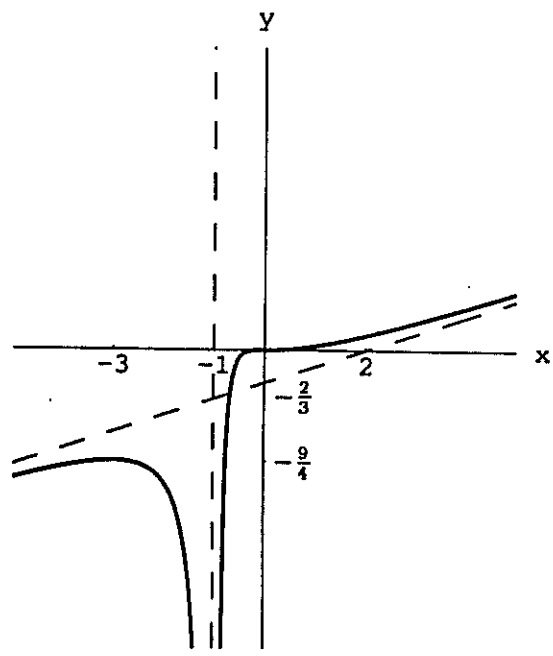
Obr. 17 Graf funkce $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$



Obr. 18 Graf funkce $f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{3x}{4} - \arccos x$



Obr. 19 Graf funkce $f(x) = x\,\mathrm{e}^x$



Obr. 20 Graf funkce $f(x) = \frac{x^3}{3\,(x+1)^2}$

TAYLORŮV ROZVOJ FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Příklad 1. Napište Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = e^{x^2-x}$ v bodě $a = 1$.

Řešení. Nejprve musíme určit první, druhou a třetí derivaci funkce $f(x)$.
$f'(x) = e^{x^2-x} \cdot (2x-1)$;
$f''(x) = e^{x^2-x} \cdot (2x-1)(2x-1) + e^{x^2-x} \cdot 2 = e^{x^2-x} \cdot (4x^2-4x+3)$;
$f'''(x) = e^{x^2-x} \cdot (2x-1)(4x^2-4x+3) + e^{x^2-x} \cdot (8x-4) = e^{x^2-x} \cdot (8x^3-12x^2+18x-7)$.
Nyní ihned dostáváme $f(1) = e^0 = 1$, $f'(1) = e^0 \cdot 1 = 1$, $f''(1) = e^0 \cdot 3 = 3$ a $f'''(1) = e^0 \cdot 7 = 7$.
Je tedy $T_3(x) = 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{3}{2!}(x-1)^2 + \frac{7}{3!}(x-1)^3 = x + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \frac{7}{6}(x-1)^3$.
Dalším výpočtem dostaneme $T_3(x) = \frac{1}{3} + \frac{3}{2}x - 2x^2 + \frac{7}{6}x^3$.

Příklad 2. Napište Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = x \cdot e^{2-x}$ v bodě $a = 2$.

Řešení. Nejprve určíme potřebné koeficienty, tzn. musíme spočítat první, druhou a třetí derivaci funkce $f(x)$.
$f'(x) = e^{2-x} + x \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = e^{2-x} \cdot (1-x)$;
$f''(x) = e^{2-x} \cdot (-1) \cdot (1-x) + e^{2-x} \cdot (-1) = e^{2-x} \cdot (x-2)$;
$f'''(x) = e^{2-x} \cdot (-1) \cdot (x-2) + e^{2-x} = e^{2-x} \cdot (3-x)$.
Dosazením ihned dostáváme $f(2) = 2e^0 = 2$, $f'(2) = e^0 \cdot (-1) = -1$, $f''(2) = e^0 \cdot 0 = 0$ a $f'''(2) = e^0 \cdot 1 = 1$.
Je tedy $T_3(x) = 2 + \frac{-1}{1!}(x-2) + \frac{0}{2!}(x-2)^2 + \frac{1}{3!}(x-2)^3 = 4 - x + \frac{1}{6}(x-2)^3$. Dalším výpočtem dostaneme $T_3(x) = \frac{8}{3} + x - x^2 + \frac{1}{6}x^3$.

Příklad 3. Napište Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \frac{3x-1}{3x-2}$ v bodě $a = 1$.

Řešení. Určeme nejprve první, druhou a třetí derivaci funkce $f(x)$.
$f'(x) = \frac{3(3x-2)-3(3x-1)}{(3x-2)^2} = \frac{-3}{(3x-2)^2}$;
$f''(x) = \frac{3 \cdot 2(3x-2) \cdot 3}{(3x-2)^4} = \frac{18}{(3x-2)^3}$;
$f'''(x) = \frac{-18 \cdot 3(3x-2)^2 \cdot 3}{(3x-2)^6} = \frac{-162}{(3x-2)^4}$.
Koeficienty potřebné pro Taylorův rozvoj jsou $f(1) = 2$, $f'(1) = -3$, $f''(1) = 18$ a $f'''(1) = -162$.
Je tedy $T_3(x) = 2 - \frac{3}{1!}(x-1) + \frac{18}{2!}(x-1)^2 - \frac{162}{3!}(x-1)^3 = 2 - 3(x-1) + 9(x-1)^2 - 27(x-1)^3$.

Příklad 4. Napište Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \operatorname{arctg} 3x$ v bodě $a = 0$.

Řešení. Určeme nejprve první, druhou a třetí derivaci funkce $f(x)$.
$f'(x) = \frac{3}{1+(3x)^2} = \frac{3}{1+9x^2}$;
$f''(x) = \frac{-3 \cdot 18x}{(1+9x^2)^2} = \frac{-54x}{(1+9x^2)^2}$;
$f'''(x) = \frac{-54 \cdot (1+9x^2)^2 - (-54x) \cdot 2 \cdot (1+9x^2) \cdot 18x}{(1+9x^2)^4} = \frac{-54 \cdot (1+9x^2) + 54x \cdot 2 \cdot 18x}{(1+9x^2)^3} = \frac{54 \cdot (-1-9x^2+36x^2)}{(1+9x^2)^3} = \frac{54 \cdot (27x^2-1)}{(1+9x^2)^3}$.
Koeficienty potřebné pro Taylorův rozvoj jsou $f(0) = \operatorname{arctg} 0 = 0$, $f'(0) = 3$, $f''(0) = 0$ a $f'''(0) = -54$.
Je tedy $T_3(x) = 0 + \frac{3}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-54}{3!}x^3 = 3x - 9x^3$.

Příklad 5. Napište Taylorův polynom 4. stupně funkce $f(x) = x \cdot \sin 2x$ v bodě $a = 0$.

Řešení. Nejprve určíme potřebné derivace funkce $f(x)$.
$f'(x) = \sin 2x + x \cdot \cos 2x \cdot 2 = \sin 2x + 2x \cdot \cos 2x$;
$f''(x) = \cos 2x \cdot 2 + 2\,\text{čos}\, 2x + 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 = 4\cos 2x - 4x \cdot \sin 2x$;
$f'''(x) = 4 \cdot (-\sin 2x) \cdot 2 - (4\sin 2x + 4x \cdot \cos 2x \cdot 2) = -12\sin 2x - 8x \cdot \cos 2x$;
$f^{(4)}(x) = -12\cos 2x \cdot 2 - 8\cos 2x + 8x \cdot \sin 2x \cdot 2 = -32\cos 2x + 16x \cdot \sin 2x$.
Koeficienty pro Taylorův rozvoj jsou $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 4$, $f'''(0) = 0$ a $f^{(4)}(0) = -32$.
Je tedy $T_4(x) = 0 + \frac{0}{1!}x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 - \frac{32}{4!}x^4 = 2x^2 - \frac{4}{3}x^4$.

Příklad 6. Napište Taylorův polynom 4. stupně funkce $f(x) = (x-1) \cdot \ln x$ v bodě $a = 1$.

Řešení. Nejprve určíme potřebné derivace funkce $f(x)$.
$f'(x) = 1 \cdot \ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x} = \ln x + 1 - x^{-1}$
$f''(x) = \frac{1}{x} - (-1)x^{-2} = x^{-1} + x^{-2}$;
$f'''(x) = (-1)x^{-2} + (-2)x^{-3} = -x^{-2} - 2x^{-3}$;
$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)x^{-3} + (-2)(-3)x^{-4} = 2x^{-3} + 6x^{-4}$.
Koeficienty pro Taylorův rozvoj jsou $f(1) = 0$, $f'(1) = 0$, $f''(1) = 2$, $f'''(1) = -3$ a $f^{(4)}(1) = 8$.
Je tedy $T_4(x) = 0 + \frac{0}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{-3}{3!}(x-1)^3 + \frac{8}{4!}(x-1)^4 =$
$= (x-1)^2 - \frac{(x-1)^3}{2} + \frac{(x-1)^4}{3} = \frac{11}{6} - \frac{29}{6}x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 + \frac{1}{3}x^4$.

Příklad 7. Napište Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} 2x - x \cdot \operatorname{arctg} 2$ v bodě $a = 1$.

Řešení. Nejprve určíme potřebné derivace funkce $f(x)$.
$f'(x) = 1 \cdot \operatorname{arctg} 2x + x \cdot \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg} 2x + \frac{2x}{1+4x^2} - \operatorname{arctg} 2$;
$f''(x) = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 + \frac{2(1+4x^2)-2x\cdot 8x}{(1+4x^2)^2} = \frac{2(1+4x^2)+2+8x^2-16x^2}{(1+4x^2)^2} = \frac{4}{(1+4x^2)^2}$;
$f'''(x) = \frac{-4\cdot 2\cdot(1+4x^2)\cdot 8x}{(1+4x^2)^4} = \frac{-64x}{(1+4x^2)^3}$.
Koeficienty pro Taylorův rozvoj jsou $f(1) = 0$, $f'(1) = \frac{2}{5}$, $f''(1) = \frac{4}{25}$, $f'''(1) = -\frac{64}{125}$.
Je tedy $T_3(x) = 0 + \frac{\frac{2}{5}}{1!}(x-1) + \frac{\frac{4}{25}}{2!}(x-1)^2 + \frac{-\frac{64}{125}}{3!}(x-1)^3 = \frac{2}{5}(x-1) + \frac{2}{25}(x-1)^2 - \frac{32}{375}(x-1)^3$.
Dalšími úpravami lze dostat $T_3(x) = -\frac{88}{375} - \frac{2}{125}x + \frac{42}{125}x^2 - \frac{32}{375}x^3$.

Příklad 8. Napište Taylorův polynom 4. stupně funkce $f(x)$=ln cos x v bodě $a = 0$.

Řešení. Nejprve určíme potřebné derivace funkce $f(x)$.
$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$;
$f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$;
$f'''(x) = \frac{2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x} = -\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$;
$f^{(4)}(x) = \frac{-2\cos^4 x + 2\sin x \cdot 3\cos^2 x(-\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{-2\cos^2 x - 6\sin^2 x}{\cos^4 x}$.
Koeficienty pro Taylorův rozvoj jsou: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = -2$.
Taylorův polynom je tedy $T_4(x) = -\frac{1}{2!}x^2 - \frac{2}{4!}x^4 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4$.

Příklad 9. Napište Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \ln \frac{3+x}{x-3}$ v bodě $a = 9$.

Řešení. Potřebné derivace jsou: $f'(x) = \frac{x-3}{3+x} \cdot \frac{x-3-3-x}{(x-3)^2} = \frac{-6}{x^2-9}$;
$f''(x) = \frac{6\cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{12x}{(x^2-9)^2}$;

$f'''(x) = \frac{12(x^2-9)^2-12x\cdot 2(x^2-9)\cdot 2x}{(x^2-9)^4} = \frac{12x^2-108-48x^2}{(x^2-9)^3} = \frac{-108-36x^2}{(x^2-9)^3}$.
Koeficienty pro Taylorův rozvoj jsou: $f(9) = \ln 2$, $f'(9) = -\frac{1}{12}$, $f''(9) = \frac{1}{48}$ a $f'''(9) = -\frac{7}{864}$. Taylorův polynom je tedy $T_3(x) = \ln 2 - \frac{1}{12}(x-9) + \frac{1}{48\cdot 2!}(x-9)^2 - \frac{7}{864\cdot 3!}(x-9)^3 = \ln 2 - \frac{1}{12}(x-9) + \frac{1}{96}(x-9)^2 - \frac{7}{5184}(x-9)^3$.

Příklad 10. Napište Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ v bodě $a = 0$.

Řešení. Nejprve určíme potřebné derivace funkce $f(x)$.
$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)-e^xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$;
$f''(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2-2e^x(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x)-2e^{2x}}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x-e^{2x}}{(1+e^x)^3}$;
$f'''(x) = \frac{(e^x-2e^{2x})(1+e^x)^3-(e^x-e^{2x})\cdot 3\cdot(1+e^x)^2e^x}{(1+e^x)^6} = \frac{(e^x-2e^{2x})(1+e^x)-3e^x(e^x-e^{2x})}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x-4e^{2x}+e^{3x}}{(1+e^x)^4}$.
Koeficienty pro Taylorův rozvoj jsou: $f(0) = \frac{1}{2}$, $f'(0) = \frac{1}{4}$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -\frac{1}{8}$.
Taylorův polynom je tedy $T_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8\cdot 3!}x^3 = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^3}{48}$.

Příklad 11. Napište Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ v bodě $a = e$.

Řešení. Nejprve určíme potřebné derivace funkce $f(x)$.
$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$;
$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{2\ln x-3}{x^3}$;
$f'''(x) = \frac{\frac{2}{x}\cdot x^3-(2\ln x-3)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{11-6\ln x}{x^4}$.
Koeficienty pro Taylorův rozvoj jsou: $f(e) = \frac{1}{e}$, $f'(e) = 0$, $f''(e) = -\frac{1}{e^3}$, $f'''(e) = \frac{5}{e^4}$.
Taylorův polynom je tedy $T_3(x) = \frac{1}{e} - \frac{1}{2!e^3}(x-e)^2 + \frac{5}{3!e^4}(x-e)^3 = -\frac{1}{3e} + \frac{7x}{2e^2} - \frac{3x^2}{e^3} + \frac{5x^3}{6e^4}$.

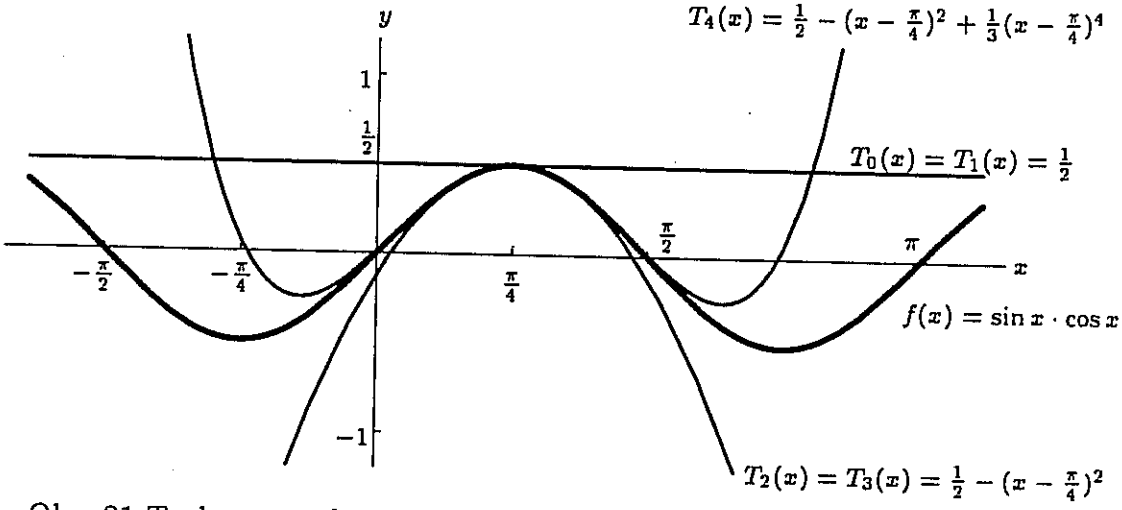
Příklad 12. Napište Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \frac{4+e^{2x}}{4-e^{2x}}$ v bodě $a = 0$.

Řešení. Určíme potřebné derivace funkce $f(x)$.
$f'(x) = \frac{2e^{2x}(4-e^{2x})-(4+e^{2x})(-e^{2x})2}{(4-e^{2x})^2} = \frac{8e^{2x}-2e^{4x}+8e^{2x}+2e^{4x}}{(4-e^{2x})^2} = \frac{16e^{2x}}{(4-e^{2x})^2}$;
$f''(x) = 16\cdot\frac{e^{2x}\cdot 2(4-e^{2x})^2-e^{2x}\cdot 2(4-e^{2x})(-e^{2x})\cdot 2}{(4-e^{2x})^4} = 32\cdot\frac{e^{2x}(4-e^{2x})+2e^{4x}}{(4-e^{2x})^3} = 32\cdot\frac{4e^{2x}+e^{4x}}{(4-e^{2x})^3}$;
$f'''(x) = 32\cdot\frac{(8e^{2x}+4e^{4x})(4-e^{2x})^3-(4e^{2x}+e^{4x})3(4-e^{2x})^2(-2e^{2x})}{(4-e^{2x})^6} =$
$= 32\cdot\frac{(8e^{2x}+4e^{4x})(4-e^{2x})+6e^{2x}(4e^{2x}+e^{4x})}{(4-e^{2x})^4} = 32\cdot\frac{32e^{2x}+16e^{4x}-8e^{4x}-4e^{6x}+24e^{4x}+6e^{6x}}{(4-e^{2x})^4} =$
$= 64\cdot\frac{16e^{2x}+16e^{4x}+e^{6x}}{(4-e^{2x})^4} = 64e^{2x}\frac{16+16e^{2x}+e^{4x}}{(4-e^{2x})^4}$.
Koeficienty pro Taylorův rozvoj jsou: $f(0) = \frac{5}{3}$, $f'(0) = \frac{16}{9}$, $f''(0) = \frac{160}{27}$ a $f'''(0) = \frac{704}{27}$.
Taylorův polynom je tedy $T_3(x) = \frac{5}{3} + \frac{16}{9}x + \frac{160}{27\cdot 2!}x^2 + \frac{704}{27\cdot 3!}x^3 = \frac{5}{3} + \frac{16}{9}x + \frac{80}{27}x^2 + \frac{352}{81}x^3$.

Příklad 13. Napište Taylorův polynom 4. stupně funkce $f(x) = \sin x\cdot\cos x$ v bodě $a = \frac{\pi}{4}$.

Řešení. Nejprve určíme potřebné derivace funkce $f(x)$.
$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$;
$f''(x) = -2\sin 2x$;
$f'''(x) = -4\cos 2x$;
$f^{(4)}(x) = 8\sin 2x$.
Koeficienty pro Taylorův rozvoj jsou: $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, $f'(\frac{\pi}{4}) = 0$, $f''(\frac{\pi}{4}) = -2$, $f'''(\frac{\pi}{4}) = 0$,

$f^{(4)}(\frac{\pi}{4}) = 8$.
Taylorův polynom je tedy $T_4(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{8}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4 = \frac{1}{2} - (x-\frac{\pi}{4})^2 + \frac{1}{3}(x-\frac{\pi}{4})^4$. Na obr. 21 si všimněte, že přesnost vyjádření funkce $f(x)$ závisí na stupni n Taylorova polynomu a na vzdálenosti bodu x od bodu $a = \frac{\pi}{4}$.



Obr. 21 Taylorovy polynomy do 4. stupně funkce $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

Příklad 14. Vypočítejte přibližně hodnotu $\ln 1,05$ pomocí Taylorova polynomu 3. stupně.

Řešení. Nejprve musíme určit Taylorův polynom funkce $f(x) = \ln x$ v okolí bodu $a = 1$.
$f(x) = \ln x$, $f(1) = 0$;
$f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(1) = 1$;
$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(1) = -1$;
$f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $f'''(1) = 2$.
Taylorův polynom je tedy $T_3(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = \frac{1}{6}(-11 + 18x - 9x^2 + 2x^3)$. Jelikož platí $f(1,05) \doteq T_3(1,05)$, dosadíme $x = 1,05$ do Taylorova polynomu a dostaneme: $T_3(1,05) = 0,048791$. Tuto hodnotu si můžeme ověřit na kalkulačce, kde dostaneme $0,048790$.

Příklad 15. Napište Taylorův polynom 3. stupně funkce $y = f(x)$ zadané implicitně rovnicí $x^2 + \ln y - 4 = 0$ v bodě $a = 2$.

Řešení. Nejprve si určíme potřebné derivace dané funkce. První derivaci určíme podle vzorce pro derivaci implicitně zadané funkce. Další derivace určíme přímo (podle vzorce pro derivaci součinu), proměnná y ale není považována za konstantu, nýbrž je funkcí proměnné x, a proto derivaci funkce y označíme y'.
$y' = -\frac{2x}{\frac{1}{y}} = -2xy$;
$y'' = -2y - 2xy'$;
$y''' = -2y' - 2y' - 2xy'' = -4y' - 2xy''$.
Koeficienty pro Taylorův rozvoj jsou $y(2) = 1$, $y'(2) = -4$, $y''(2) = 14$ a $y'''(2) = -40$.
Je tedy $T_3(x) = 1 - \frac{4}{1!}(x-2) + \frac{14}{2!}(x-2)^2 - \frac{40}{3!}(x-2)^3 = \frac{271}{3} - 112x + 47x^2 - \frac{20}{3}x^3$.