DEFINICE Z LINEÁRNÍ ALGEBRY

Skripta **Matematické metody pro statistiku a operační výzkum** (Nešetřilová, H., Šařecová, P., 2009).

1. definice

Vektorovým prostorem rozumíme neprázdnou množinu prvků $\mathbf{V}$, na které jsou definovány dvě operace: **sčítání** prvků množiny $\mathbf{V}$ (každé dvojici prvků $x, y \in \mathbf{V}$ je jednoznačně přiřazen prvek $x + y \in \mathbf{V}$) a **násobení** prvků množiny $\mathbf{V}$ reálným číslem (každému prvku $x \in \mathbf{V}$ a každému reálnému číslu $r \in \mathbb{R}$ je jednoznačně přiřazen prvek $r \cdot x \in \mathbf{V}$). Obě operace musí navíc (pro všechny prvky $x, y, z \in \mathbf{V}$ a všechna reálná čísla $r, s \in \mathbb{R}$) splňovat následující axiomy:

$$
\begin{array}{lrcl}
A1: & x + y & = & y + x, \\
A2: & x + (y + z) & = & (x + y) + z, \\
A3: & \multicolumn{3}{l}{\text{existuje prvek } o \in \mathbf{V} \text{ takový, že } x + o = x,} \\
A4: & r \cdot (x + y) & = & r \cdot x + r \cdot y, \\
A5: & (r + s) \cdot x & = & r \cdot x + s \cdot x, \\
A6: & r \cdot (s \cdot x) & = & (r \cdot s) \cdot x, \\
A7: & 1 \cdot x & = & x, \\
 & 0 \cdot x & = & o.
\end{array}
$$

Prvky vektorového prostoru nazveme **vektory**. Prvek o nazveme **nulovým vektorem** vektorového prostoru $\mathbf{V}$.

2. definice

Neprázdná podmnožina $\mathbf{S}$vektorového prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá **podprostor vektorového prostoru V**, jestliže platí

(1) pro všechna $x, y \in \mathbf{S}$ je $x + y \in \mathbf{S}$($\mathbf{S}$ je uzavřená vzhledek ke sčítání),

(2) pro každé $x \in \mathbf{S}$ a každé reálné číslo $r \in \mathbb{R}$ je $r \cdot x \in \mathbf{S}$ ($\mathbf{S}$ je uzavřená vzhledem k násobení reálným číslem).

3. definice

Nechť $x_1, x_2, \ldots, x_k$ jsou vektory z vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Řekneme, že vektor x je **lineární kombinací** vektorů $x_1, x_2, \ldots, x_k$, je-li

$$x = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_k \cdot x_k$$

kde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ jsou nějaká reálná čísla. Čísla $c_1, c_2, \ldots, c_k$ se nazývají **koeficienty lineární kombinace.**

4. definice

Nechť M je libovolná množina vektorů vektorového prostoru **V**, **lineárním obalem množiny** M (ve **V**) nazveme množinu všech lineárních kombinací vektorů z M, označíme ji L(M).

5. definice

Vektory $x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k \in \mathbf{V}$ nazýváme **lineárně závislé**, jestliže existují reálná čísla $c_1,\, c_2, \ldots,\, c_k$, z nichž alespoň jedno je nenulové, taková, že

$$x = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_k \cdot x_k = o$$

Nejsou-li vektory $x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k$ lineárně závislé, říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**.

6. definice

Nechť $\mathrm{M} \subseteq \mathbf{V}$ je taková množina vektorů z **V**, že $\mathrm{L(M)} = \mathbf{V}$. Pak řekneme, že M **generuje** celý vektorový prostor **V**. Je-li množina M konečná, $\mathrm{M} = \{x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k\}$, pak říkáme, že vektorový prostor **V** je **konečně generovaný** a vektory $x_1,\, x_2, \ldots,\, x_k$ nazýváme **generátory** tohoto prostoru.

7. definice

Nechť M je lineárně nezávislá množina generátorů vektorového prostoru **V**. Pak říkáme, že množina M je **bází** vektorového prostoru **V**.

8. definice

Počet vektorů v bázi vektorového prostoru **V** nazveme **dimenzí** tohoto prostoru a značíme dim **V**. Dále definujeme $\dim \{o\} = 0$.

9. definice

Nechť $n \in \mathrm{N}$. Označme $\mathbb{R}^n$ množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel. Tedy $\mathbb{R}^n = \{(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)$; kde $x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n \in \mathbb{R}.\}$ Řekneme, že dvě uspořádané n-tic $(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)$ a $(y_1,\, y_2, \ldots,\, y_n)$ z $\mathbb{R}^n$ jsou **si rovny** právě když

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$$

10. definice

Nechť $x = (x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)$ a $y = (y_1,\, y_2, \ldots,\, y_n)$ jsou dva vektory z $\mathbb{R}^n$. **Skalárním součinem** $x \cdot y$ nazveme reálné číslo

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2, \ldots, x_n y_n,$$

nebo stručněji

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

11. definice

Nechť $x \in \mathbb{R}^n$. Reálné číslo

$$|x| = \sqrt{x \cdot x}$$

nazveme **velikostí (normou)** vektoru x. Vektor x se nazývá **jednotkový (normovaný)** vektor, jestliže $|x| = 1$.

12. definice

Vektory x, y z vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$ se nazývají vzájemně **ortogolální** (kolmé), jestliže $x \cdot y = 0$.

13. definice

Báze $x_1, x_2, \ldots, x_m$ podprostoru **S** vektorového prostoru $\mathbb{R}^n$, $m \leq n$, se nazývá **ortogonální**, jestliže vektory $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tvoří ortogonální skupinu vektorů. Jsou-li navíc $x_1, x_2, \ldots, x_m$ jednotkové vektory, nazýváme tuto bázi **ortonormální bází S.**

14. definice

Nechť **S** je podmnožina $\mathbb{R}^n$. **Ortogonálním doplňkem** množiny **S** v $\mathbb{R}^n$ nazveme množinu $\{\, v \in \mathbb{R}^n; v \cdot x = 0$ pro všechny vektory $x \in \mathbf{S}\}$, označíme ji $\mathbf{S}^\perp$.

15. definice

Matice **A** typu $(m, n) \in \mathrm{N}$, je tabulka reálných čísel uspořádaná do m řádků a n sloupců

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

16. definice

Řekneme, že matice **A** a **B** jsou si **rovny** ($\mathbf{A} = \mathbf{B}$), jsou-li to matice stejného typu (m, n), pro jejichž prvky platí

$$\begin{aligned} a_{ij} = b_{ij} \quad & i = 1, 2, \ldots, m \\ & j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

17. definice

Nechť **A** a **B** jsou matice **stejného typu** (m, n),

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Součtem matic $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ nazveme matici

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \ldots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \ldots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \ldots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

18. definice

Hodností matice **A** typu (m, n) rozumíme dimenzí podprostoru $\mathbb{R}^n$ generovaného řádkovými vektory matice **A**. Hodnost matice **A** označíme h**A**.

19. definice

Řekneme, že matice **T** typu (m, n) je **trojúhelníková matice,** jestliže $m \leq n$ a pro prvky matice **T** platí

$$t_{ij} = 0 \text{ pro } j < i \text{ a } t_{ii} \neq 0 \text{ pro } i = 1, \ldots, m.$$

20. definice

Nechť **A** je matice typu (m, n). **Transponovanou** maticí k matici **A** nazveme matici $\mathbf{A^T}$ typu (m, n) pro kterou platí, že i-tý řádek matice **A** je i-tým sloupcem matice $\mathbf{A^T}$.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix} \quad M^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 9 & 14 & 19 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

Transponace

21. definice

Řekneme, že matice **A** je **Gaussova matice**, jestliže první nenulový prvek v každém řádků je zároveň posledním nenulovým prvkem příslušného sloupce a matice **A** navíc neobsahuje žádný nulový řádek.

22. definice

Řekneme, že matice **A** je **Jordanova matice**, jestliže první nenulový prvek v každém řádku je roven jedné a je to také jediný nenulový prvek v příslušném slupci. Matice **A** navíc neobsahuje žádný nulový řádek.

23. definice

Nechť **A** je matice typu (m, p), **B** je typu (p, n). **Součinem matic A** a **B** nazveme matici **C** typu (m, n), pro jejíž prvky platí

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n.$$

Součin matic **A** a **B** označíme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (resp. **AB**).

24. definice

Nechť **A** je čtvercová matice řádu n, $n \in \mathrm{N}$. Řekneme, že matice **A** je **regulární**, jestliže h$\mathbf{A} = n$. Matici **A**, která není regulární, nazveme **singulární** maticí.

25. definice

Nechť **A** je čtvercová matice řádu $n, n \in \mathrm{N}$. Jestliže existuje čtvercová matice $\mathbf{A}^{-1}$ řádu n, pro kterou platí

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = E$$

pak říkáme, že matice $\mathbf{A}^{-1}$ je **inverzní maticí** k matici $\mathbf{A}$.

26. definice

Dvojici (k_i, k_j) nazýváme **inverzní** v permutaci $\pi = (k_1,\, k_2, \ldots,\, k_n)$, jestliže platí $i < j$ a současně $k_i < k_j$.

27. definice

Permutace π se nazývá **sudá**, jestliže celkový počet inverzí r v této permutaci je sudé číslo. Permutace π se nazývá **lichá**, jestliže počet inverzí r je liché číslo.

28. definice

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Determinantem matice $\mathbf{A}$ nazveme reáln číslo

$$\det \mathbf{A} = \sum_{(\pi)} (-1)^r \, a_{1k_1} \cdot a_{2k_2}, \ldots, a_{2nk_n},$$

kde $\sum_{(\pi)}$ znamená součet přes všchny permutace $\pi = (k_1,\, k_2, \ldots,\, k_n)$ sloupcových indexů (1, 2,. . . , n) a r je celkový počet inverzní v permutaci π.

29. definice

Nechť $\mathbf{A} = (\mathrm{a}_{ij})$ je čtvercová matice řádu $n, n > 1$. **Submaticí** $\mathbf{A}_{ij}$ matice $\mathbf{A}$ nazveme čtvercovou matici řádu $n\breve{}1$, která vznikla z matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. **Algebraickým doplňkem** D_{ij} prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ nazveme číslo

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \det \mathbf{A}_{ij}.$$

30. definice

Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Jestliže pro nenulový vektor $x \in \mathbb{R}^n$ a komplexni číslo λ platí

$$\mathbf{A}(x)^T = \lambda(x)^T,$$

pak číslo λ (lambda) nazveme **vlastní číslo** matice $\mathbf{A}$ a vektor x nazveme **vlastní vektor** matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu λ.