VZTAHY, VZORCE – ALGEBRAICKÉ ÚPRAVY VÝRAZŮ

1. Mnohočleny

Pro $a, b \in \mathbb{R}$ platí:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \tag{1.1}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b). \tag{1.2}$$

2. Kvadratická rovnice

Jedná se o rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{2.1}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, s neznámou x. Kořeny (neznámé) x_1, x_2 vypočítáme podle vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad \text{jestliže } D = b^2 - 4ac \geq 0 \text{ (diskriminant).} \tag{2.2}$$

Pokud $D = 0$, je $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ *dvojnásobným* kořenem.
Platí rovnost $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Pokud $a = 1$, máme $x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$, tedy $b = -(x_1 + x_2)$, $c = x_1 x_2$.

Poznámka 1. Pokud $D < 0$, kvadratická rovnice (2.1) *nemá* reálné kořeny. Má však dva komplexně sdružené komplexní kořeny $x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a}$, kde ije *imaginární jednotka*, tj. $\mathrm{i}^2 = -1$.

Zjednodušeně řečeno, je-li

- diskriminant $D > 0$, pak řešením rovnice jsou dva různé reálné kořeny,
- diskriminant $D = 0$, pak řešením rovnice je jeden dvojnásobný reálný kořen,
- diskriminant $D < 0$, pak řešením rovnice dva komplexně sdružené kořeny.

3. Mocniny

Jsou-li $r, s \in \mathbb{R}$, pak platí následující rovnosti pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$, pro která mají obě strany smysl:

$$x^r\, x^s = x^{r+s}, \quad x^r : x^s = \frac{x^r}{x^s} = x^{r-s}, \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}, \quad x^0 = 1, \tag{3.1}$$

$$\text{speciálně:} \quad x^{-1} = \frac{1}{x}, \quad x^{-r}\, x^r = x^0 = 1,$$

$$x^r\, y^r = (x\, y)^r, \quad \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r, \quad \frac{1}{x^r} = \left(\frac{1}{x}\right)^r, \tag{3.2}$$

$$(x^r)^s = x^{rs}. \tag{3.3}$$

Příklady 2. Pro $x \neq 0$ máme:

$$\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = x^{-\frac{2}{3}}, \qquad \frac{x^{-1}}{-x} = \frac{1}{-x\,x} = \frac{1}{-x^2} \quad \text{(dle (3.1)).}$$

4. Odmocniny

Pro $m, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{R}$ a $x, y \in (0, \infty)$ platí:

(4.1) $$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

(4.2) $$\sqrt[n]{x\,y} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}, \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}},$$

(4.3) $$\sqrt[n]{x^r} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^r = x^{\frac{r}{n}}, \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x},$$

$$\text{speciálně:} \quad \sqrt[n]{x^n} = x.$$

5. Některé úpravy zlomků

(5.1) $$\text{složený zlomek:} \quad \frac{\frac{x}{y}}{\frac{w}{z}} = \frac{x}{y}\cdot\frac{z}{w} = \frac{xz}{yw} \quad (y, z, w \neq 0),$$

(5.2) $$\text{usměrňování zlomků — příklad:} \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \overset{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1}{=} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x} \quad (x > 0),$$

(5.3) $$\frac{a+b}{c} = \underline{\underline{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}} \quad \times \quad \underline{\underline{\frac{a}{b+c}}}.$$

6. Logaritmy

Předpokládejme, že

$$a \in (0,1) \cup (1, \infty).$$

Platí

(6.1) $$a^y = x \quad \Leftrightarrow \quad y = \log_a x \quad \text{pro } x > 0,\ y \in \mathbb{R},$$

$$\text{speciálně:} \quad 10^y = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log y \quad (\text{pro } x > 0,\ y \in \mathbb{R}),$$

$$\text{speciálně:} \quad \mathrm{e}^y = x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y \quad (\text{pro } x > 0,\ y \in \mathbb{R},\ \mathrm{e} = 2,71\ldots \text{ je } \textit{Eulerovo číslo}),$$

(6.2) $$a^{\log_a b} = b \quad \text{pro } b > 0, \quad (\text{např. } \mathrm{e}^{\ln 3} = 3),$$

Pro $u, v > 0$, $s \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí:

(6.3) $$\log_a(u\,v) = \log_a u + \log_a v, \quad \log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v,$$

(6.4) $$\log_a\left(u^s\right) = s\,\log_a u, \quad \log_a\left(\sqrt[n]{u}\right) = \frac{1}{n}\log_a u,$$

(6.5) $$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1,$$

(6.6) $$A^B = a^{B\log_a A} \quad a \in (0;1)\cup(1;\infty), \text{kde } A > 0$$

(6.7) $$\text{speciálně z (6.4), (6.5) plyne:} \quad s = \log_a\left(a^s\right).$$