Substituční metoda

Lenka Přibylová

6. března 2007

Obsah

$\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x$ 3

$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ 11

$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$ 19

Vypočtěte $\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x$

Vypočtěte $\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x$

$$\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x$$

Vnitřní složka je $2x+7$.

Vypočtěte $\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x$

$$\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x = \boxed{2x+7=t}$$

Zavedeme substituci $2x+7=t$.

Vypočtěte $\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x$

$$\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} 2x+7 &= t \\ 2\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Nalezneme vztah mezi $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}t$.

Vypočtěte $\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x$

$$\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} 2x+7 &= t \\ 2\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Vypočtěte $\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x$

$$\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} 2x+7 &= t \\ 2\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}} = \int e^{t}\,\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme substituci.

Vypočtěte $\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x$

$$\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} 2x+7 &= t \\ 2\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}} = \int e^t \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}e^t + c$$

Integrujeme.

Vypočtěte $\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x$

$$\int e^{2x+7}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} 2x+7 &= t \\ 2\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}} = \int e^t \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}e^t + c = \frac{1}{2}e^{2x+7} + c$$

Použijeme substituci k návratu k proměnné x. Došli jsme k témuž výsledku jako při použití vztahu $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

Výraz je součinem polynomu a složené exponenciální funkce.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,dx$.

$$\int xe^{1-x^2}\,dx$$

$$1-x^2=t$$

Zkusíme substituovat za vnitřní složku složené funkce e^{1-x^2}.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Hledáme vztah mezi diferenciály. Derivujeme obě strany substituce.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Vyjádříme odsud výraz $x\,\mathrm{d}x$, který figuruje uvnitř integrálu.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t$$

Dosadíme.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}e^t + c$$

Vypočtěte integrál pomocí vzorce.

Vypočtěte $\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int xe^{1-x^2}\,\mathrm{d}x \quad \boxed{\begin{aligned} 1-x^2 &= t \\ -2x\,\mathrm{d}x &= \mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int e^t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}e^t + c$$

$$= -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + c$$

Použijeme substituci pro návrat k původní proměnné.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$$

Příklady s odmocninou z lineárního členu řešíme vždy druhou substituční metodou. Zbavujeme se tak nepříjemné odmocniny.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{gathered}\sqrt{1+x} = t\\ \\ \\ \end{gathered}}$$

Zavedeme proto substituci $t = \sqrt{1+x}$.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{array}{l}\sqrt{1+x}=t\\ 1+x=t^2\\ \\ \\ \end{array}}$$

Odmocninu vždy převedeme umocněním na tvar bez odmocniny, přecházíme takto vlastně k inverzní funkci.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= t\\ 1+x &= t^2\\ x &= t^2-1\end{aligned}}$$

Inverzní funkce bude v přepisu také třeba.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= t \\ 1+x &= t^2 \\ x &= t^2-1 \\ \mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

Hledáme vztah mezi diferenciály. Derivujeme obě strany inverzní substituce.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= t \\ 1+x &= t^2 \\ x &= t^2-1 \\ \mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1}{(2+t^2-1)}$$

Všechny výrazy s x zaměníme pomocí substituce za ekvivalentní výrazy s t. Nejdříve použijeme za x inverzní substituce.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= t \\ 1+x &= t^2 \\ x &= t^2-1 \\ \mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1}{(2+t^2-1)t}$$

Odmocnina odpovídá t.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= t\\ 1+x &= t^2\\ x &= t^2-1\\ \mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t\end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1}{(2+t^2-1)t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t$$

Diferenciál také substituujeme. Všechny členy s x jsme nahradili.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= t \\ 1+x &= t^2 \\ x &= t^2-1 \\ \mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t \end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1}{(2+t^2-1)t} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

Zkrátíme a konstantu převedeme před integrál.

Vypočtěte $\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= t\\ 1+x &= t^2\\ x &= t^2-1\\ \mathrm{d}x &= 2t\,\mathrm{d}t\end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1}{(2+t^2-1)t} \cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\,t + c$$

Integrujeme.

Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x = \boxed{\begin{aligned}\sqrt{1+x}&=t\\ 1+x&=t^2\\ x&=t^2-1\\ \mathrm{d}x&=2t\,\mathrm{d}t\end{aligned}}$$

$$= \int \frac{1}{(2+t^2-1)t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= 2\operatorname{arctg} t + c = 2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x} + c$$

Navrátíme se k původní proměnné.