)ESTILOVAT KONSTANTU

NEURČITÝ INTEGRÁL

Metoda přímé integrace = tabulkové integrály

Příklad 1. Vypočtěte $\displaystyle\int (2x^3 - 5x^2 + 8x - 3)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int (2x^3 - 5x^2 + 8x - 3)\,\mathrm{d}x = 2\int x^3\,\mathrm{d}x - 5\int x^2\,\mathrm{d}x + 8\int x\,\mathrm{d}x - 3\int \mathrm{d}x =$
$= 2\cdot\frac{x^4}{4} - 5\cdot\frac{x^3}{3} + 8\cdot\frac{x^2}{2} - 3x = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 3x + C.$

Příklad 2. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{(2x^2+1)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{(2x^2+1)^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4x^4+4x^2+1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int (4x + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^3})\,\mathrm{d}x = 4\int x\,\mathrm{d}x + 4\int \frac{\mathrm{d}x}{x} +$
$+ \int x^{-3}\,\mathrm{d}x = 4\frac{x^2}{2} + 4\ln|x| + \frac{x^{-2}}{-2} = 2x^2 + 4\ln|x| - \frac{1}{2x^2} + C.$

Příklad 3. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{2x-3}{x\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int (\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x\cdot\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x = 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - 3\int x^{-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - 3\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} =$
$= 4\sqrt{x} + \frac{6}{\sqrt{x}} + C.$

Příklad 4. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{3-5\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{3-5\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - 5\int \mathrm{d}x = 3\arcsin x - 5x + C.$

Příklad 5. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x^4-5}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. Výraz v čitateli zlomku můžeme takto upravit: $\int \frac{x^4-5}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^4-1-4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$ $= \int \frac{(x^2-1)(x^2+1)-4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int (x^2 - 1 - \frac{4}{1+x^2})\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x - 4\,\mathrm{arctg}\,x + C$. Lze také použít dělení mnohočlenu mnohočlenem, tedy $(x^4-5):(x^2+1) = x^2 - 1 - \frac{4}{x^2+1}$, a dále pokračovat uvedeným způsobem.

Příklad 6. Vypočtěte $\displaystyle\int \mathrm{e}^{3x}\cdot 2^x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \mathrm{e}^{3x}\cdot 2^x\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^3\cdot 2)^x\,\mathrm{d}x = \frac{(2\mathrm{e}^3)^x}{\ln(2\mathrm{e}^3)} = \frac{2^x\cdot\mathrm{e}^{3x}}{\ln 2 + 3\ln\mathrm{e}} = \frac{2^x\cdot\mathrm{e}^{3x}}{3+\ln 2} + C.$

Příklad 7. Vypočtěte $\displaystyle\int 4^x\left(1 - \frac{4^{-x}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int 4^x\left(1 - \frac{4^{-x}}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int 4^x\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{4^x}{\ln 4} - \mathrm{arctg}\,x + C.$

Příklad 8. Vypočtěte $\displaystyle\int (3\sin x + 5\cos x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int (3\sin x + 5\cos x)\,\mathrm{d}x = 3\int \sin x\,\mathrm{d}x + 5\int \cos x\,\mathrm{d}x = -3\cos x + 5\sin x + C.$

Příklad 9. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x - (1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$
$= 2\int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 2x - \operatorname{tg} x + C.$

Příklad 10. Vypočtěte $\displaystyle\int (2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int (2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{cotg} x)^2\,\mathrm{d}x = \int (4\operatorname{tg}^2 x + 12 + 9\operatorname{cotg}^2 x)\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + 12\int \mathrm{d}x +$
$+ 9\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x + 12x + 9\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 4\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x - 4\int \mathrm{d}x + 12x +$
$+ 9\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x - 9\int \mathrm{d}x = 4\operatorname{tg} x - 4x + 12x - 9\operatorname{cotg} x - 9x = 4\operatorname{tg} x - 9\operatorname{cotg} x - x + C.$

Integrace metodou per partes

Příklad 1. Vypočtěte $\displaystyle\int x^7 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int x^7 \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = x^7 & v = \ln x \\ u = \frac{x^8}{8} & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{x^8}{8} \cdot \ln x - \frac{1}{8}\int x^7\,\mathrm{d}x = \frac{x^8}{8} \cdot \ln x - \frac{1}{8} \cdot \frac{x^8}{8} =$
$= \frac{x^8}{8}(\ln x - \frac{1}{8}) + C.$

Příklad 2. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = x^{-\frac{1}{2}} & v = \ln x \\ u = 2x^{\frac{1}{2}} & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x - 2\int \frac{\sqrt{x}}{x}\,\mathrm{d}x =$
$= 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \ln x - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x} = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot (\ln x - 2) + C.$

Příklad 3. Vypočtěte $\displaystyle\int x \cdot 2^x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int x \cdot 2^x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = 2^x & v = x \\ u = \frac{2^x}{\ln 2} & v' = 1 \end{vmatrix} = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2}\int 2^x\,\mathrm{d}x = x \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^x}{\ln 2} =$
$= \frac{2^x}{\ln 2}(x - \frac{1}{\ln 2}) + C.$

Příklad 4. Vypočtěte $\displaystyle\int (x^3 + 2x^2 - 5x) \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int (x^3 + 2x^2 - 5x) \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^x & v = x^3 + 2x^2 - 5x \\ u = \mathrm{e}^x & v' = 3x^2 + 4x - 5 \end{vmatrix} = (x^3 + 2x^2 - 5x) \cdot \mathrm{e}^x -$
$- \int (3x^2 + 4x - 5) \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^3 + 2x^2 - 5x) \cdot \mathrm{e}^x - \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^x & v = 3x^2 + 4x - 5 \\ u = \mathrm{e}^x & v' = 6x + 4 \end{vmatrix} =$
$= (x^3 + 2x^2 - 5x) \cdot \mathrm{e}^x - (3x^2 + 4x - 5) \cdot \mathrm{e}^x + \int (6x + 4) \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = (x^3 + 2x^2 - 5x) \cdot \mathrm{e}^x -$
$- (3x^2 + 4x - 5) \cdot \mathrm{e}^x + \begin{vmatrix} u' = \mathrm{e}^x & v = 6x + 4 \\ u = \mathrm{e}^x & v' = 6 \end{vmatrix} = (x^3 + 2x^2 - 5x) \cdot \mathrm{e}^x - (3x^2 + 4x - 5) \cdot \mathrm{e}^x +$
$+ (6x + 4) \cdot \mathrm{e}^x - \int 6\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(x^3 + 2x^2 - 5x - 3x^2 - 4x + 5 + 6x + 4 - 6) =$
$= \mathrm{e}^x(x^3 - x^2 - 3x + 3) + C.$

Příklad 5. Vypočtěte $\int (x+3)\cos x \,\mathrm{d}x$. místo konstanty +C napíšu 1

Řešení. $\int (x+3)\cos x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \cos x & v = x+3 \\ u = \sin x & v' = 1 \end{vmatrix} = (x+3)\sin x - \int \sin x \,\mathrm{d}x =$ lze
$= (x+3)\sin x + \cos x + C.$

Příklad 6. Vypočtěte $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int x \cdot \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = x & v = \operatorname{arctg} x \\ u = \frac{x^2+1}{2} & v' = \frac{1}{1+x^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$
$= \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C.$

Příklad 7. Vypočtěte $\int \ln^2 x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln^2 x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \ln^2 x \\ u = x & v' = \frac{2\ln x}{x} \end{vmatrix} = x \cdot \ln^2 x - 2\int x \cdot \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x =$
$= x \cdot \ln^2 x - 2 \begin{vmatrix} u' = 1 & v = \ln x \\ u = x & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} = x \cdot \ln^2 x - 2\,(x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x) = x \cdot \ln^2 x - 2x \cdot \ln x + 2x =$
$= x\,(\ln^2 x - 2\ln x + 2) + C.$

Příklad 8. Vypočtěte $\int 3^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$. SPOČÍST II. způsobem

Řešení. $\int 3^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = \cos x & v = 3^x \\ u = \sin x & v' = 3^x \cdot \ln 3 \end{vmatrix} = 3^x \cdot \sin x - \ln 3 \cdot \int 3^x \cdot \sin x \,\mathrm{d}x =$
$= 3^x \cdot \sin x - \ln 3 \cdot \begin{vmatrix} u' = \sin x & v = 3^x \\ u = -\cos x & v' = 3^x \cdot \ln 3 \end{vmatrix} = 3^x \cdot \sin x - \ln 3 \cdot (-3^x \cdot \cos x +$
$+ \ln 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x) = 3^x \cdot \sin x + 3^x \cdot \ln 3 \cdot \cos x - \ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x.$

Porovnáme-li začátek a konec výpočtu, dostaneme rovnost $\int 3^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = 3^x(\sin x + \ln 3 \cdot \cos x) - \ln^2 3 \cdot \int 3^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x$. Integrály převedeme na levou stranu rovnice a dostaneme $(1 + \ln^2 3) \cdot \int 3^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = 3^x(\sin x + \ln 3 \cdot \cos x)$. A tedy $\int 3^x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{3^x}{1+\ln^2 3}(\sin x + \ln 3 \cdot \cos x) + C$. Ke stejnému výsledku vede i volba $u' = 3^x$, $v = \cos x$.

Příklad 9. Vypočtěte $\int \frac{4\ln x + x^3}{x^5}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{4\ln x + x^3}{x^5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{4\ln x}{x^5}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = 4x^{-5} & v = \ln x \\ u = -\frac{1}{x^4} & v' = \frac{1}{x} \end{vmatrix} - \frac{1}{x} =$
$= -\frac{\ln x}{x^4} + \int \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{x} = -\frac{\ln x}{x^4} - \frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^4}(\ln x + \frac{1}{4} + x^3) + C.$

$= -\frac{\ln x}{x^4} - \frac{1}{4x^4} - \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}$

Příklad 10. Vypočtěte $\int x^2 \cdot \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int x^2 \cdot \sin(\ln x)\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u' = x^2 & v = \sin(\ln x) \\ u = \frac{x^3}{3} & v' = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \end{vmatrix} =$
$= \frac{x^3}{3}\sin(\ln x) - \int \frac{x^3}{3}\cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\sin(\ln x) - \int \frac{x^2}{3}\cos(\ln x)\,\mathrm{d}x =$

$= \frac{x^3}{3}\sin(\ln x) - \begin{vmatrix} u' = \frac{x^2}{3} & v = \cos(\ln x) \\ u = \frac{x^3}{9} & v' = -\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x} \end{vmatrix} =$

$= \frac{x^3}{3}\sin(\ln x) - \frac{x^3}{9}\cos(\ln x) - \int \frac{x^3}{9}\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$= \frac{x^3}{3}\sin(\ln x) - \frac{x^3}{9}\cos(\ln x) - \frac{1}{9}\int x^2\cdot\sin(\ln x)\,dx.$

Platí, že $\int x^2\cdot\sin(\ln x)\,dx = \frac{x^3}{3}\sin(\ln x) - \frac{x^3}{9}\cos(\ln x) - \frac{1}{9}\int x^2\cdot\sin(\ln x)\,dx$. Dále dostáváme $\frac{10}{9}\int x^2\cdot\sin(\ln x)\,dx = \frac{x^3}{9}(3\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$, z toho vypočteme, že $\int x^2\cdot\sin(\ln x)\,dx = \frac{x^3}{10}(3\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C$.

Integrace substituční metodou

Příklad 1. Vypočtěte $\displaystyle\int 4x^3\cdot\sin x^4\,dx$. $x = \sqrt[4]{t}$

Řešení. Protože diferenciál funkce x^4 je $4x^3\,dx$, je vhodná substituce $x^4 = t$. Pak
$\int 4x^3\cdot\sin x^4\,dx = \begin{vmatrix} x^4 = t \\ 4x^3\,dx = dt \end{vmatrix} = \int \sin t\,dt = -\cos t = -\cos x^4 + C.$

Příklad 2. Určete $\displaystyle\int \frac{x}{(3+x^2)^2}\,dx$. — derivace $t' = 1$ + připsat dt

Řešení. $\int \frac{x}{(3+x^2)^2}\,dx = \begin{vmatrix} 3+x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{2}\,dt \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\int t^{-2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2t} =$

$= -\frac{1}{2(3+x^2)} + C.$

Příklad 3. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2+3x}}\,dx$.

Řešení. Tento integrál lze řešit substitucí $2+3x = z$ nebo $\sqrt{2+3x} = t$. Ukážeme si oba způsoby.

$\int \frac{1}{\sqrt{2+3x}}\,dx = \begin{vmatrix} 2+3x = z \\ 3\,dx = dz \\ dx = \frac{1}{3}\,dz \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{3}\int z^{-\frac{1}{2}}\,dz = \frac{1}{3}\cdot\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{z} = \frac{2}{3}\sqrt{2+3x} + C.$

$\int \frac{1}{\sqrt{2+3x}}\,dx = \begin{vmatrix} \sqrt{2+3x} = t \\ 2+3x = t^2 \\ 3\,dx = 2t\,dt \\ dx = \frac{2}{3}t\,dt \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\int \frac{t\,dt}{t} = \frac{2}{3}\int dt = \frac{2}{3}t = \frac{2}{3}\sqrt{2+3x} + C.$ Jak je vidět z výpočtu, výhodnější a rychlejší způsob integrace je substituce za odmocninu.

Příklad 4. Vypočtěte $\displaystyle\int x^4\cdot e^{2x^5+5}\,dx$.

Řešení. $\int x^4\cdot e^{2x^5+5}\,dx = \begin{vmatrix} 2x^5+5 = t \\ 10x^4\,dx = dt \\ x^4\,dx = \frac{1}{10}\,dt \end{vmatrix} = \frac{1}{10}\int e^t\,dt = \frac{1}{10}e^t = \frac{1}{10}e^{2x^5+5} + C.$

Příklad 5. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{x\cdot\ln^4 x}\,dx$.

Řešení. $\int \frac{1}{x\cdot\ln^4 x}\,dx = \begin{vmatrix} \ln x = t \\ \frac{1}{x}\,dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{t^4} = \int t^{-4}\,dt = \frac{t^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3t^3} = -\frac{1}{3\ln^3 x} + C.$

Příklad 6. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C.$

Příklad 7. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 6}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 6}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \mathrm{e}^x - 6 = t \\ \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| = \ln|\mathrm{e}^x - 6| + C.$
Protože v tomto integrálu je v čitateli derivace jmenovatele, mohli jsme hned použít vzorec pro $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ a napsat přímo výsledek $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 6}\,\mathrm{d}x = \ln|\mathrm{e}^x - 6| + C$.

Příklad 8. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\operatorname{arctg} x}\,\mathrm{d}x = \ln|\operatorname{arctg} x| + C.$

Příklad 9. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{x^2}{(3x+4)^3}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{x^2}{(3x+4)^3}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} 3x + 4 = t \\ 3\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3} \\ x = \frac{t-4}{3} \end{array} \right| = \int \frac{(\frac{t-4}{3})^2}{t^3} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{3} = \frac{1}{27} \int \frac{t^2 - 8t + 16}{t^3}\,\mathrm{d}t =$
$= \frac{1}{27} \int (\frac{1}{t} - 8t^{-2} + 16t^{-3})\,\mathrm{d}t = \frac{1}{27}(\ln|t| - 8\frac{t^{-1}}{-1} + 16\frac{t^{-2}}{-2}) = \frac{1}{27}(\ln|t| + \frac{8}{t} - \frac{8}{t^2}) =$
$= \frac{1}{27}(\ln|t| + \frac{8(t-1)}{t^2}) = \frac{1}{27}\ln|3x+4| + \frac{8}{27} \cdot \frac{3x+4-1}{(3x+4)^2} = \frac{1}{27}\ln|3x+4| + \frac{8(x+1)}{9(3x+4)^2} + C.$

Příklad 10. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{4+9x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{1}{4+9x^2}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 3x = 2t \\ 3\,\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{2}{3} \int \frac{\mathrm{d}t}{4+4t^2} = \frac{2}{3} \int \frac{\mathrm{d}t}{4(1+t^2)} = \frac{1}{6} \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg} t =$
$= \frac{1}{6}\operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C.$

Příklad 11. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-3x^2}} = \left| \begin{array}{c} 3x^2 = 2t^2 \\ x \cdot \sqrt{3} = t \cdot \sqrt{2} \\ \sqrt{3}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{2-2t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t =$
$= \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin t = \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin \frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arcsin \frac{x\sqrt{6}}{2} + C.$

Příklad 12. Vypočtěte $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \mathrm{e}^x = t \\ \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t = \arcsin \mathrm{e}^x + C.$

Příklad 13. Vypočtěte $\int \frac{\sin x}{9+16\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{\sin x}{9+16\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} 4\cos x = 3t \\ -4\sin x\,\mathrm{d}x = 3\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = -\frac{3}{4}\int \frac{1}{9+9t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{3}{36}\int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$
$= -\frac{1}{12}\operatorname{arctg} t = -\frac{1}{12}\operatorname{arctg}\left(\frac{4}{3}\cos x\right) + C.$

Příklad 14. Vypočtěte $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x \cdot \sqrt{25-36\mathrm{tg}^2 x}}$.

Řešení. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x\cdot\sqrt{25-36\mathrm{tg}^2 x}} = \left| \begin{array}{r} 6\mathrm{tg}\, x = 5t \\ 6\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = 5\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{5}{6}\int \frac{1}{\sqrt{25-25t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t =$
$= \frac{1}{6}\arcsin t = \frac{1}{6}\arcsin\left(\frac{6}{5}\mathrm{tg}\, x\right) + C.$

Příklad 15. Vypočtěte $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} x^8 = t \\ 8x^7\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \frac{1}{8}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{8}\arcsin t = \frac{1}{8}\arcsin x^8 + C.$

Příklad 16. Vypočtěte $\int \frac{8x+1}{4x^2+25}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{8x+1}{4x^2+25}\,\mathrm{d}x = \int \frac{8x}{4x^2+25}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{4x^2+25}\,\mathrm{d}x = \ln|4x^2+25| + \left| \begin{array}{r} 2x = 5t \\ 2\,\mathrm{d}x = 5\,\mathrm{d}t \end{array} \right| =$
$= \ln|4x^2+25| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{25t^2+25}\,\mathrm{d}x = \ln|4x^2+25| + \frac{5}{50}\int \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln|4x^2+25| + \frac{1}{10}\operatorname{arctg} t =$
$= \ln(4x^2+25) + \frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2}{5}x + C.$

Příklad 17. Vypočtěte $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} x+1 = 2t \\ \mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{2}{4t^2+4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} =$
$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$

Příklad 18. Vypočtěte $\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \frac{x+2}{x^2-6x+10}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+2}{(x-3)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} x-3 = t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{t+3+2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t +$
$+ \int \frac{5}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + 5\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + 5\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\ln\left((x-3)^2+1\right) +$
$+5\operatorname{arctg}(x-3) = \frac{1}{2}\ln(x^2-6x+10) + 5\operatorname{arctg}(x-3) + C.$

Příklad 19. Vypočtěte $\int \sin^4 x \cdot \cos x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \sin^4 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int t^4\,\mathrm{d}t = \frac{1}{5}t^5 = \frac{1}{5}\sin^5 x + C.$

Příklad 20. Vypočtěte $\int \cos^2 x \cdot \sin^5 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\cos^2 x\cdot\sin^5 x = \cos^2 x\cdot\sin^4 x\cdot\sin x = \cos^2 x\,(1-\cos^2 x)^2\cdot\sin x$. Tedy
$\int \cos^2 x\cdot\sin^5 x\,\mathrm{d}x = \int \cos^2 x\,(1-\cos^2 x)^2\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \cos x = t \\ -\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| =$