Monotonie (Příklad ze skript Matematika I, str. 54, př. 19)

$$f(x) = 3x \cdot e^{x^2-4x+3}$$

I) Definiční obor $x \in R$

II) $f'(x) = 3e^{x^2-4x+3} + 3xe^{x^2-4x+3} \cdot (2x-4) = 3e^{x^2-4x+3} + 3e^{x^2-4x+3} \cdot (2x^2-4x) =$

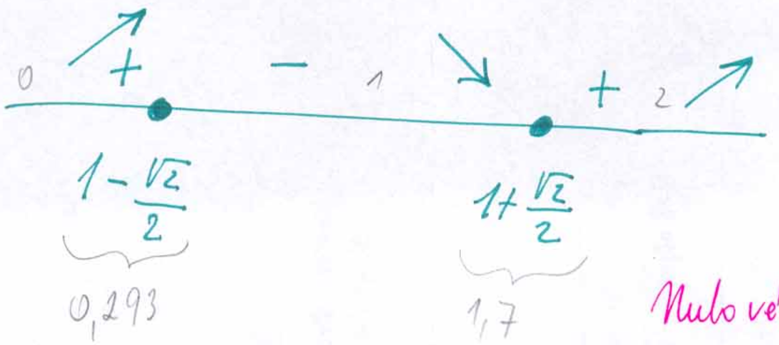
$= 3e^{x^2-4x+3}(1+2x^2-4x)$

III) Nulové body: $2x^2-4x+1=0$

$D = 16 - 4 \cdot 2 = 8 \qquad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{4}$

$+ \; \frac{4+2\sqrt{2}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

$- \; \frac{4-2\sqrt{2}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$



Nulové body jsou extrémy

Zkoumání funkčních hodnot 1. derivace v daných intervalech:

$f'(0) = 3e^3 \cdot (1) = \oplus$

$f'(1) = 3e^0 \cdot (1+2-4) = 3 \cdot (-1) = \ominus$

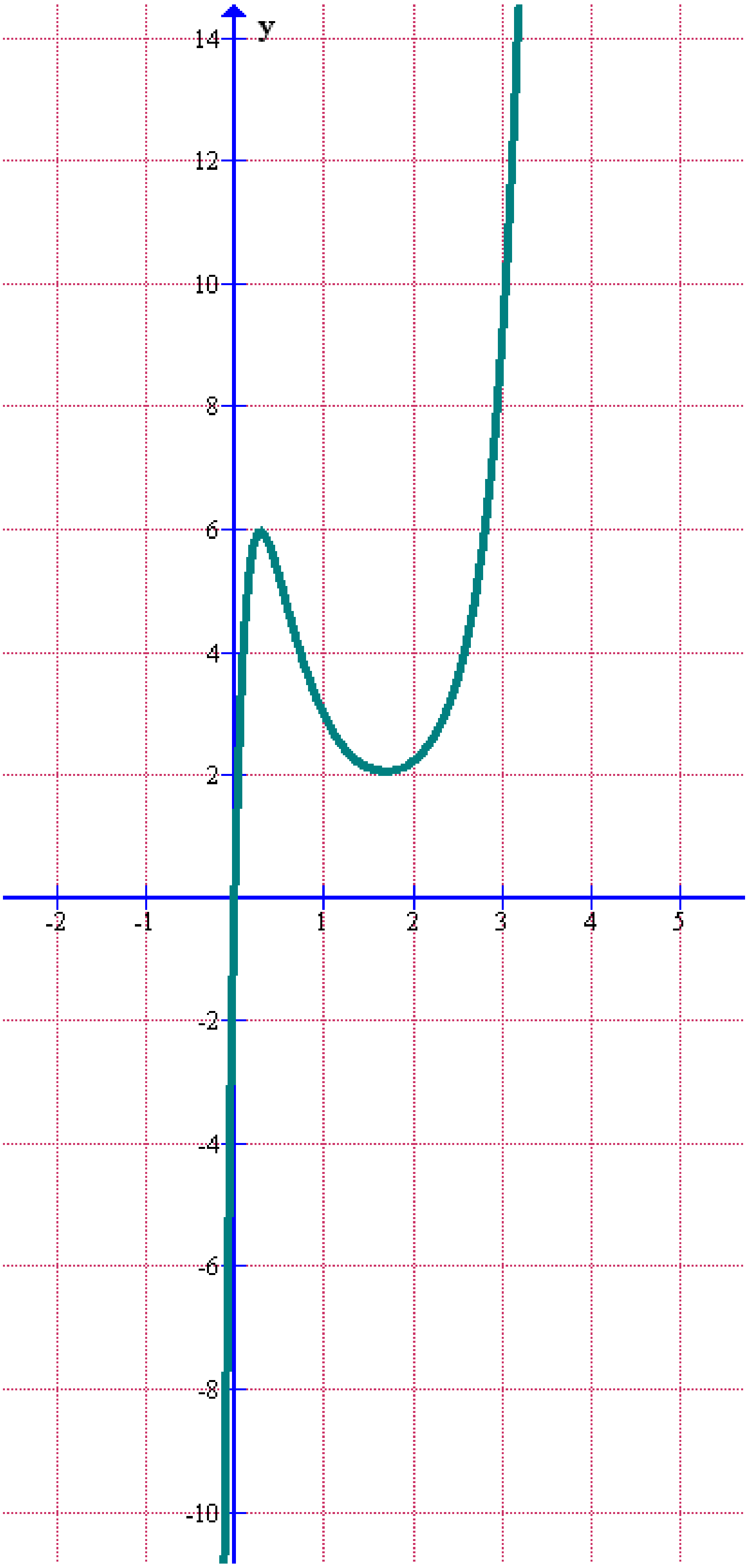
$f'(2) = 3e^{-1} \cdot (1+2\cdot4-8) = \frac{3}{e} \cdot 1 = \oplus$

Funkce $f(x)$ je:

rostoucí na intervalu $(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$ a $\langle 1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$

klesající na intervalu $\langle 1-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$

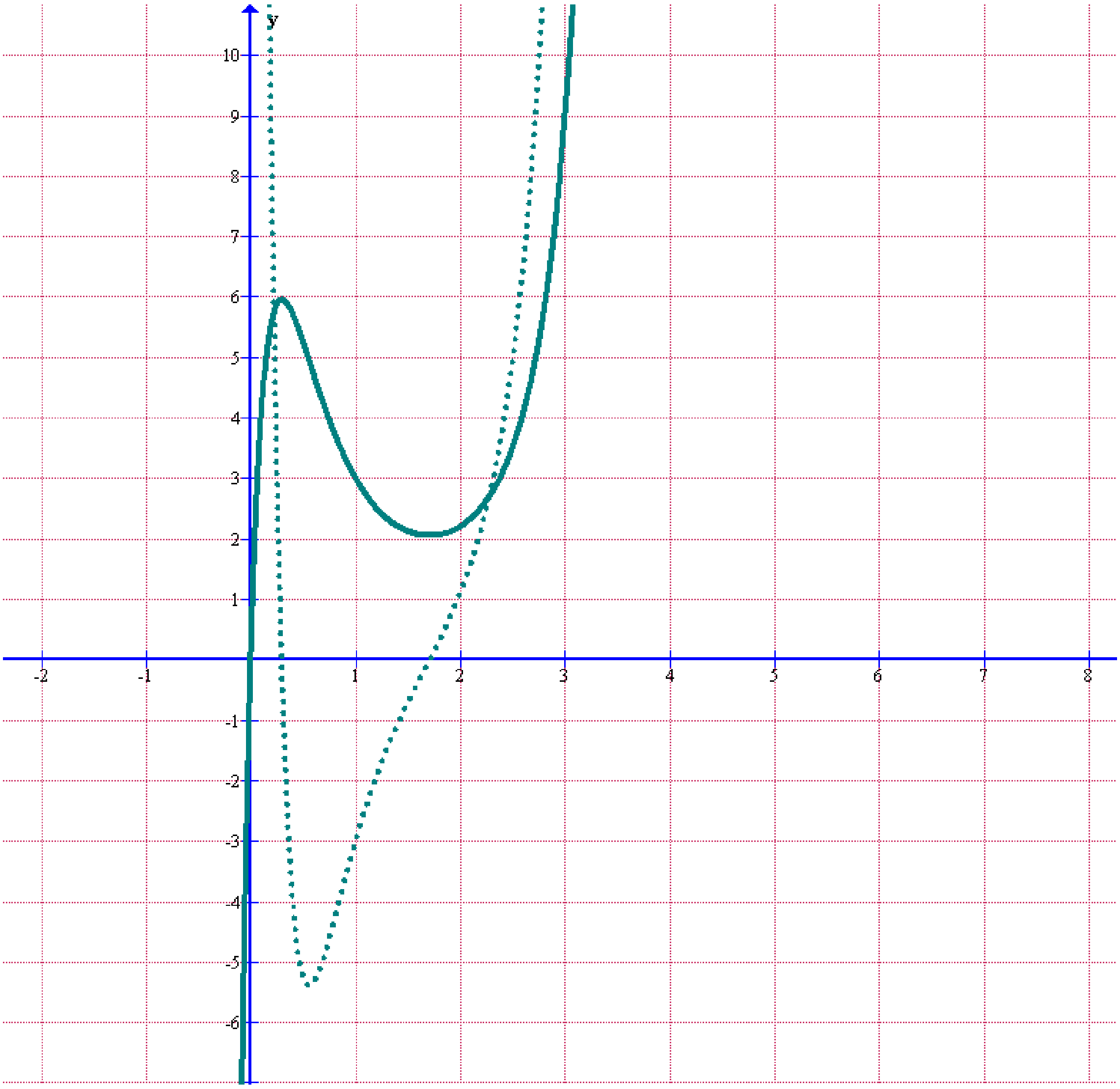
Obrázek 1. Grafické znázornění funkce



Zdroj: program Graph

Při výpočtu monotonií nás zajímá průběh funkce – zda a na kterých intervalech je zadaná funkce rostoucí a na kterých je klesající na jejím definičním oboru.

Obrázek 2. Grafické znázornění funkce (plná) a její první derivace (tečkovaná)



Zdroj: program Graph

Kde je původní funkce rostoucí, tam je derivace *nad* osou x. Kde je klesající, tam je *pod* osou x. V místech extrémů osu x protíná.