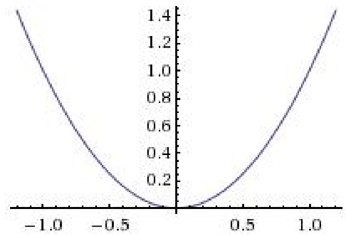
KONVEXITA A KONKÁVITA – KONKRÉTNÍ PŘÍKLAD

Na následujícím příkladu si ukážeme výpočet konvexity 3 způsoby na jedné funkci.

(1) Např.: máme zadaný předpis funkce $y = x^2$. Tento předpis je tak jednoduchý, že jej dokážeme okamžitě nakreslit. Z nákresu je zřejmé, zda a kde je funkce konvexní či konkávní.

Obrázek 1. Průběh funkce $y = x^2$



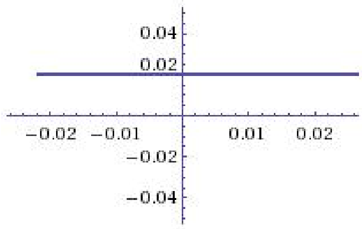
Zdroj: program Wolfram Alpha

- funkce $y = x^2$ je konvexní na celém intervalu $(-\infty; \infty)$

(2) Nyní vezmeme tuto funkci, ale budeme postupovat matematicky. Zjistíme konvexitu přes derivace. Postup je:
  (a) Definiční obor $x \in \mathbb{R}$
  (b) 1. derivace zadané funkce je $y' = 2x$, což je nová funkce. Z ní čteme a ji si kreslíme při výpočtu monotonií.
  (c) 2. derivace zadané funkce je $y'' = 2$, je již 3. funkce. Tu si nyní nakreslíme.

Protože jsme zvolili jednoduchý předpis, je jednoduchá i derivace a snadno ji nakreslíme:

Obrázek 2. Průběh funkce $y'' = 2$



Zdroj: program Wolfram Alpha

I druhá derivace a původní funkce mají k sobě speciální vztah, kterého budeme u výpočtu konvexit využívat. Když je na daném intervalu funkce konvexní, jsou funkční hodnoty (y-nové souřadnice) kladné a naopak když původní funkce konkávní, jsou funkční hodnoty první derivace záporné. (zároveň, když se nad celou věcí zamyslíme, lze z druhé derivace vyčíst monotonii první derivace :)).

- funkce $y = x^2$ je konvexní na celém intervalu $(-\infty; \infty)$

(3) Protože většina předpisů i jejich derivací je však tak složitá, že si je nedokážeme nakreslit, spoléháme se na matematický výpočet až do konce. Celý postup je následující:
  (a) Definiční obor $x \in \mathbb{R}$

(b) 1. derivace zadané funkce je $y' = 2x$

(c) 2. derivace zadané funkce je $y'' = 2$

(d) Zjištění nulových bodů – v tomto případě se v druhé derivace nevyskytuje žádné x, odpadá dopočet nulových bodů (nemá smysl pokládat př. v našem případě dvojku rovnou nule, z toho nic nevzejde), v takovém případě, nevyskytuje-li se v druhé derivace proměnná, můžeme očekávat 3 situace:

   (i) funkce je na celém svém definičním oboru konvexní

   (ii) funkce je na celém svém definičním oboru konkávní

   (iii) funkce není v žádném místě svého definičního oboru ani konvexní ani konkávní

   V tomto případě se jedná o situaci (i), neboť funkční hodnota druhé derivace je rovna pro kterékoli libovolné x je kladná (rovna $+2$).

   Kdy nastává jaká situace

   (i) funkce je na celém svém definičním oboru konvexní (y'' = kladná konstanta)

   (ii) funkce je na celém svém definičním oboru konkávní (y'' = záporná konstanta)

   (iii) funkce není v žádném místě svého definičního oboru ani konvexní ani konkávní (y''= nula), nule se rovná buď na celém definičním oboru nebo v místech nulových bodů (tzv. inflexních bodů)

- funkce $y = x^2$ je konvexní na celém intervalu $(-\infty; \infty)$

Ze všech způsobů vychází stejný výsledek!