Diferenciální rovnice

$$y' + 4y = (10x+1)e^{-x}$$

Řešení rovnice s nulou napravo:

$$y' + 4y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -4y \qquad /\cdot dx \quad /\cdot \frac{1}{y}$$

$$\int \frac{dy}{y} = -4\int dx$$

$$\ln|y| = -4x + \ln C \qquad /-\ln C$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = -4x \qquad /\text{odln}$$

$$\frac{y}{C} = e^{-4x} \qquad /\cdot C$$

$$y = C\cdot e^{-4x}$$ ← toto je řešení rovnice bez pravé strany.

Výsledek celé rovnice je: $y = Ce^{-4x} + \underbrace{v(x)}$

$$*\, v(x) = C(x)\, e^{-4x}$$

$$v'(x) = C'(x)\, e^{-4x} + C(x)\, e^{-4x}\cdot(-4)$$

Dosazení do zadané rovnice:

$$C'(x)\, e^{-4x} + \cancel{C(x)\, e^{-4x}\cdot(-4x)} + 4\cdot\left(\cancel{C(x)\cdot e^{-4x}}\right) = (10x+1)\,e^{-x}$$

$$C'(x)\cdot e^{-4x} = (10x+1)\,e^{-x} \rightarrow C'(x) = \frac{(10x+1)\,e^{-x}}{e^{-4x}} \rightarrow C(x) = \int (10x+1)\,e^{3x}\,dx$$

Výpočet integrálu: $\left| \begin{array}{ll} u' = e^{3x} & v = 10x+1 \\ u = \frac{1}{3}e^{3x} & v' = 10 \end{array} \right| = \frac{1}{3}e^{3x}\cdot(10x+1) - \frac{10}{3}\int e^{3x}\,dx =$

$$= \frac{1}{3}e^{3x}\cdot(10x+1) - \frac{10}{3}\cdot\frac{1}{3}e^{3x} = \frac{1}{3}e^{3x}(10x+1) - \frac{10}{9}e^{3x} = \frac{1}{9}e^{3x}(30x+3-10) =$$

$$= \frac{1}{9}e^{3x}(30x-7)$$

C(x)

$$*\, v(x) = C(x)\cdot e^{-4x} \qquad \left[\frac{1}{9}e^{3x}(30x-7)\right]\cdot e^{-4x}$$

$$y = Ce^{-4x} + \frac{e^{-x}}{9}(30x-7)$$

v(x)

OBRÁZEK 1. Grafické znázornění výsledné funkce

Zdroj: program Graph

Neznámými v těchto rovnicích nejsou čísla, ale jsou jimi funkce. Ve výsledku se objevuje C (nebo K), tedy libovolně volitelně konstanta. Pro zobrazení této funkce byla náhodně zvolena konstanta C (nebo K)$= 2$.