

URČITÝ INTEGRÁL – OBSAH PLOCHY ROVINNÉHO OBRAZCE OHRANIČENÉHO ZADANÝMI KŘIVKAMI

Co je kžženým výsledkem je zřejmé ze zadání – obsah, respektive obsah jistého obrazce omezeného zadanými křivkami který je samozřejmě možno graficky znázornit. Výsledná čísla vychází v plošných jednotkách (p. j.). U aplikace vychází konkrétní nezáporná čísla, k výsledkům se tedy již nepřipisuje „ $+C$ “.

V tomto souboru jsou ukázány příklady vždy pouze s jednou křivkou. Počítáme tedy obrazce mezi křivku a osou x .

PŘÍKLADY S KONSTANTOU

Zadání: $y = 5$ **Výpočet z Obrázku 1:** Jedná se v podstatě o čtverec takže klasické strana krát strana. $5 \cdot 5 = \underline{\underline{25 \text{ p. j.}}}$

Hranice: $\langle 0, 5 \rangle$ **Výpočet integrálem:** $\int_0^5 5 \, dx = [5x]_0^5 = [5 \cdot 5 - 5 \cdot 0] = 25 - 0 = \underline{\underline{25 \text{ p. j.}}}$, což mimochodem odpovídá počtu jednotlivých čtverečků ve vymezené ploše (aditivita integrálů).

Zadání: $y = 5$ **Výpočet z Obrázku 2:** Jde o obdélník o stranách 5 a 6, výsledek je tedy $\underline{\underline{30 \text{ p. j.}}}$

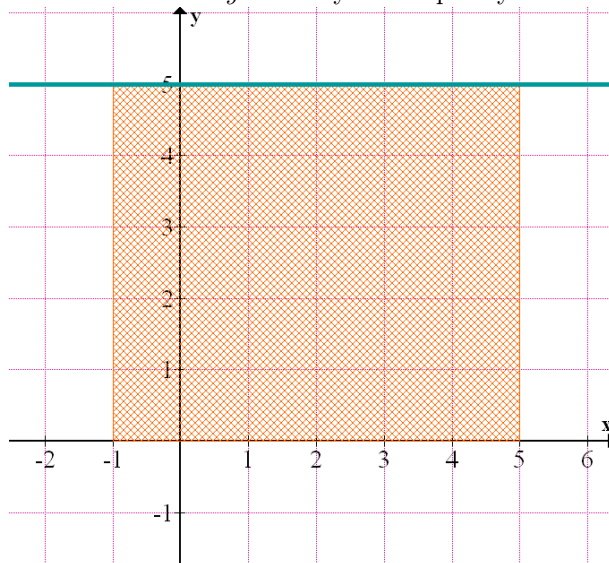
Hranice: $\langle -1, 5 \rangle$ **Výpočet integrálem:** $\int_{-1}^5 5 \, dx = [5x]_{-1}^5 = [5 \cdot 5 - 5 \cdot (-1)] = 25 + 5 = \underline{\underline{30 \text{ p. j.}}}$

OBRÁZEK 1. Průběh funkce $y = 5$ a vymezení plochy v hranicích $\langle 0, 5 \rangle$



Zdroj: program Graph

OBRÁZEK 2. Průběh funkce $y = 5$ a vymezení plochy v hranicích $\langle -1, 5 \rangle$



Zdroj: program Graph

PŘÍKLADY S PŘÍMKOU

Zadání: $y = x$

Výpočet z Obrázku 3: Zprvė lze prostě spočítat jednotlivé čtverečky. Obrázek obsahuje 10 celých čtverců a 5 malých trojúhelníků (polovičních čtverců). Očekávaný výsledek je tedy 12,5 p. j. Nebo můžeme celý trojúhelník chápat jako polovinu velkého čtverce a dopočítat se výsledku dle vzorce $\frac{\text{strana} \cdot \text{strana}}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} = \underline{12,5 \text{ p. j.}}$

Hranice: $\langle 0, 5 \rangle$

Výpočet integrálem: $\int_0^5 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left[\frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] = \frac{25}{2} - 0 = \underline{12,5 \text{ p. j.}}$

Zadání: $y = x$

Výpočet z Obrázku 4: Vidíme že se v podstatě jedná o dva totožné trojúhelníky kdy už jsme v předešlém příkladě spočítali obsah jednoho z nich, takže můžeme jen předchozí výsledek vynásobit dvěma. Nebo si v hlavě spojíme trojúhelníky do čtverce.

Hranice: $\langle -5, 5 \rangle$

Výpočet integrálem: Tento příklad je trochu odlišný od ostatních, neb se část křivky na zadaném intervalu dostává pod osu x . Musíme tedy výpočet rozdělit a spočítat dané plochy zvlášť, neboť se VŽDY musí odečítat spodní křivka od horní.

Výpočet první části obsahu. Obsah plochy nemůže být záporný.

$$\int_{-5}^0 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-5}^0 = \left[\frac{0^2}{2} - \frac{(-5)^2}{2} \right] = 0 - \frac{25}{2} \Rightarrow \underline{\frac{25}{2}}$$

Výpočet druhé části obsahu.

$$\int_0^5 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \left[\frac{5^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right] = \underline{\frac{25}{2}}$$

Sečteme obě plochy.

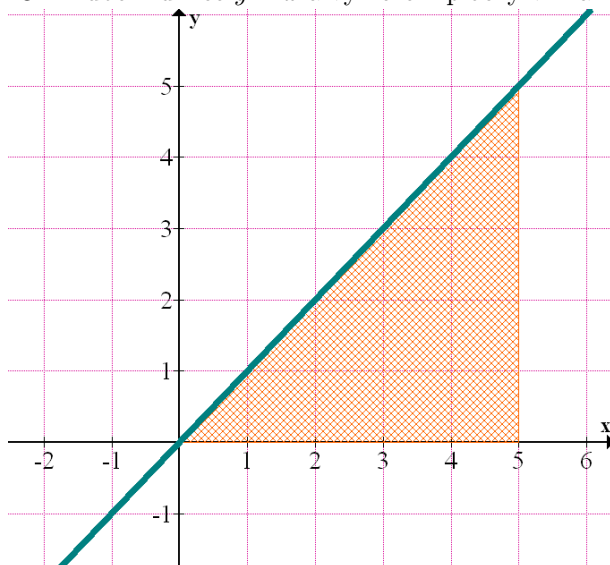
$$\frac{25}{2} + \frac{25}{2} = \underline{25 \text{ p. j.}}$$

Ve zkuškových příkladech se nestane, že bychom museli příklad takto rozdělovat. Máme vždy zadané alespoň dvě funkce a vždy je jasné která je horní a která spodní.

Zadání: $y = 5 - x$ **Výpočet z Obrázku 5:** A náš oblíbený $\frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}$ trojúhelník potřetí a naposledy.

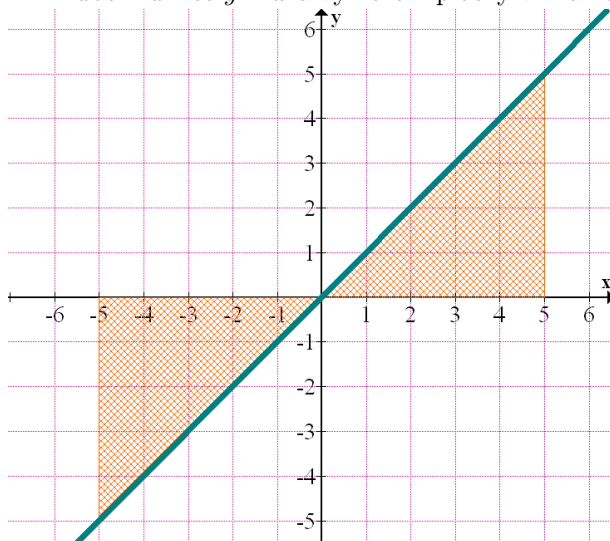
Hranice: $\langle 0, 5 \rangle$ **Výpočet integrálem:** $\int_0^5 (5 - x) dx = \int_0^5 5 dx - \int_0^5 x dx = [5x]_0^5 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^5 = [5 \cdot 5 - 5 \cdot 0] - \left[\frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right] = (25 - 0) - \left(\frac{25}{2} - 0\right) = 25 - 12,5 = \underline{\underline{12,5 \text{ p. j.}}}$

OBRÁZEK 3. Průběh funkce $y = x$ a vymezení plochy v hranicích $\langle 0, 5 \rangle$



Zdroj: program Graph

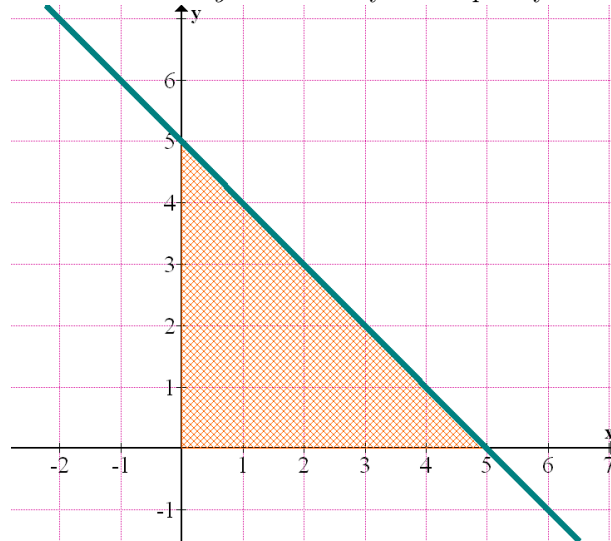
OBRÁZEK 4. Průběh funkce $y = x$ a vymezení plochy v hranicích $\langle -5, 5 \rangle$



Zdroj: program Graph

PŘÍKLADY S POSUNUTOU PŘÍMKOU

OBRÁZEK 5. Průběh funkce $y = 5 - x$ a vymezení plochy v hranicích $\langle 0, 5 \rangle$

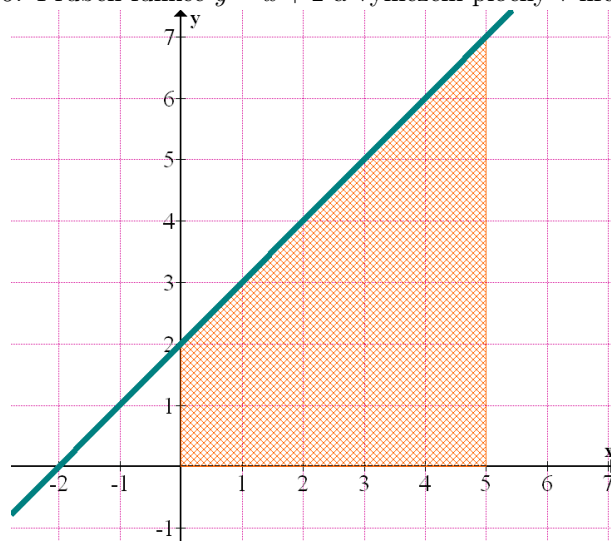


Zdroj: program Graph

Zadání: $y = x + 2$ **Výpočet z Obrázku 6:** Obrazec si rozdělíme na spodní obdelník a vrchní trojúhelník. Opět můžeme jednoduše spočítat malé čtverce, obdelník se skládá z 10 čtverců a trojúhelník jich obsahuje 12,5. Výsledná plocha obrazce je 22,5 p. j. Nebo lze spočítat obsah obdelníku $2 \cdot 5 = 10$ a trojúhelníku, který je 12,5 a opět dílčí obsahy sečíst.

Hranice: $\langle 0, 5 \rangle$ **Výpočet integrálem:**
$$\int_0^5 (x + 2) dx = \int_0^5 x dx + \int_0^5 2 dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 + [2x]_0^5 = \left[\frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] + [2 \cdot 5 - 2 \cdot 0] = \left(\frac{25}{2} - 0 \right) + (10 - 0) = 12,5 + 10 = \underline{\underline{22,5 \text{ p. j.}}}$$

OBRÁZEK 6. Průběh funkce $y = x + 2$ a vymezení plochy v hranicích $\langle 0, 5 \rangle$



Zdroj: program Graph

Zadání: $y = x^2$ **Výpočet z Obrázku 7:** Nyní začneme mít problémy s přesným určováním výsledků z obrázku. Každopádně stále dokážeme výsledek alespoň přibližně odhadnout. V tomto případě máme jeden celý čtverec a pak čtyři částečné. Výsledek je necelých 3 p. j.

Hranice: $\langle 0, 2 \rangle$ **Výpočet integrálem:** $\int_0^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] = \frac{8}{3} - 0 = \underline{\underline{2,67 \text{ p. j.}}}$

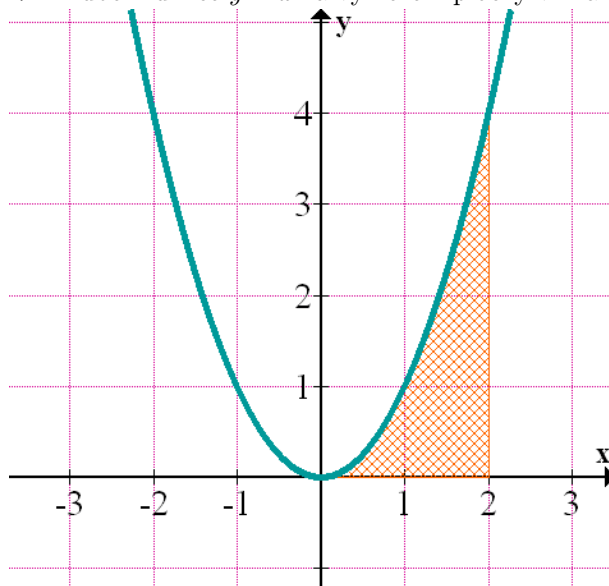
Zadání: $y = x^2$ **Výpočet z Obrázku 8:** Zadaná funkce je osově souměrná, vyznačená plocha je identická s předchozí.

Hranice: $\langle -2, 0 \rangle$ **Výpočet integrálem:** $\int_{-2}^0 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^0 = \left[\frac{0^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right] = \frac{0}{3} - \frac{(-8)}{3} = \frac{8}{3} = \underline{\underline{2,67 \text{ p. j.}}}$

Zadání: $y = x^2$ **Výpočet z Obrázku 9:**

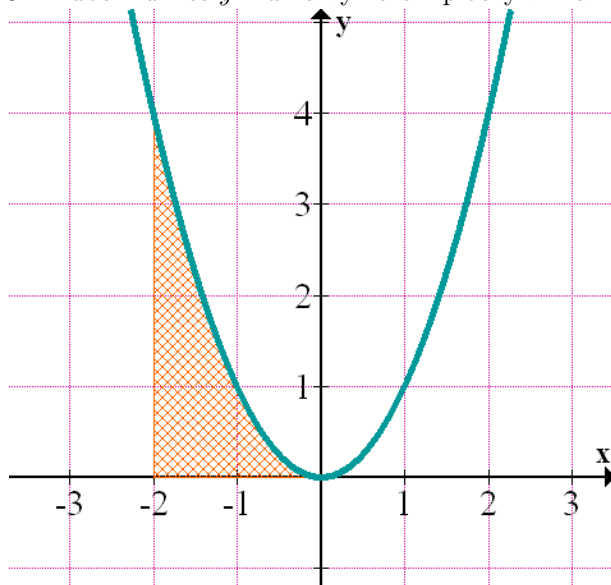
Hranice: $\langle -2, 2 \rangle$ **Výpočet integrálem:** $\int_{-2}^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{-8}{3} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = \underline{\underline{5,34}}$

OBRÁZEK 7. Průběh funkce $y = x^2$ a vymezení plochy v hranicích $\langle 0, 2 \rangle$



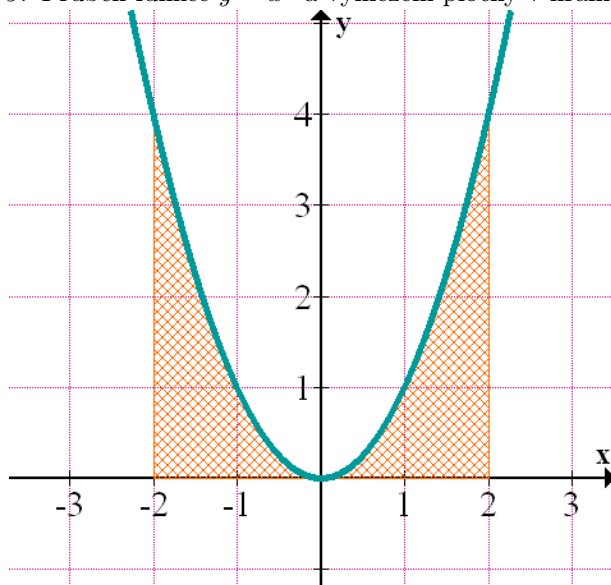
Zdroj: program Graph

OBRÁZEK 8. Průběh funkce $y = x^2$ a vymezení plochy v hranicích $\langle -2, 0 \rangle$



Zdroj: program Graph

OBRÁZEK 9. Průběh funkce $y = x^2$ a vymezení plochy v hranicích $\langle -2, 2 \rangle$



Zdroj: program Graph