JAK ČTEME Z DERIVACÍ PRŮBĚH PŮVODNÍCH FUNKCÍ?

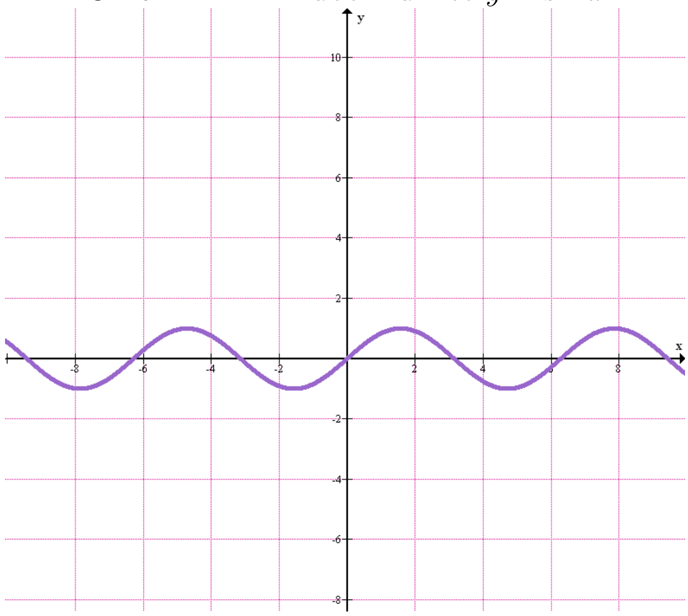
Pozn: veškeré funkce mají ve vnitřních bodech definičního oboru první derivaci.

1. Monotonie

(1) Dostaneme zadanou např. funkci $y = \sin x$.

(2) Když si funkci nakleslíme (nějakým programem, přes tabulku funkčních hodnot či si graf funkce pamatujeme), bez počítání vidíme, že na určitých intervalech tato funkce roste a na jiných klesá. Právě to, kde roste a kde klesá zjišťujeme při výpočtech *monotonií.* My si ale běžně funkce nekreslíme, navíc v testech dostáváme funkce tak složité, že pro nás není možné si funkci načrtnout. Musíme postupovat analyticky, matematickým aparátem, kterým jsou derivace.

Obrázek 1. Průběh funkce $y = \sin x$



Zdroj: program Graph

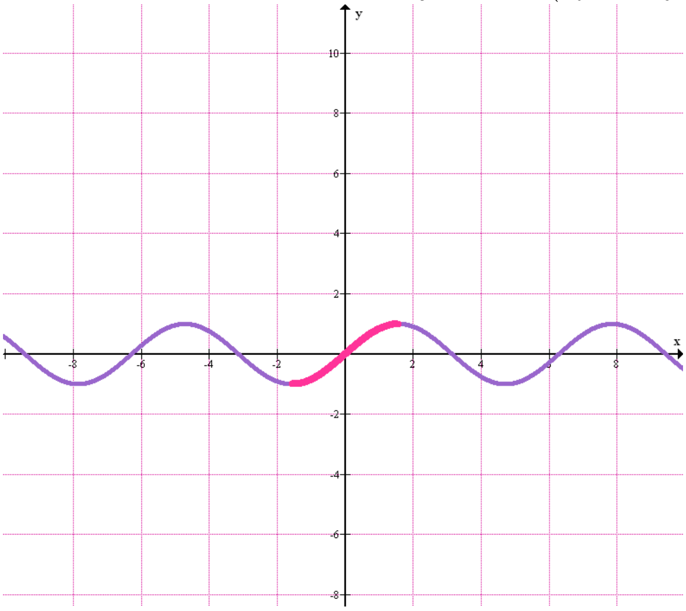
(3) Jaký je vztah mezi funkcí a její derivací? Podívejme se lépe na místo, kde funkce roste (na druhém obrázku je zvýrazněn jen jeden interval, kde funkce $y = \sin x$ roste).

(4) Soustřeďme se na chování derivace zadané funkce, což je $y' = \cos x$, v místech, které jsme si vyznačili.

(5) Nutně dospějeme k závěru, že v místech, kde původní, testovaná funkce f roste, je její první derivace f' nad osou x. Všechny body ležící v intervalu, kde zadaná funkce f roste mají na křivce první derivace f' kladnou funkční hodnotu (y-psilonovou souřadnici).

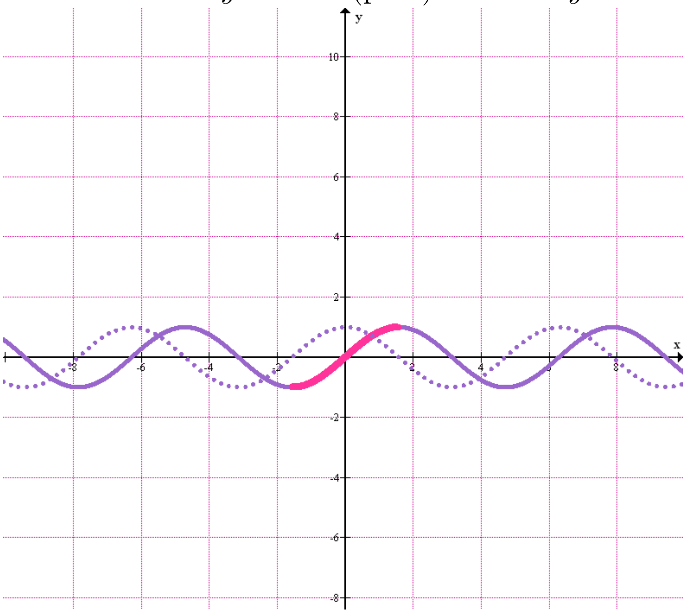
(6) Analogicky pro intervaly, kde funkce f klesá, jsou funkční hodnoty první derivace f' záporné.

Obrázek 2. Rostoucí interval funkce $y = \sin x$ (vybrán jen jeden)



Zdroj: program Graph

Obrázek 3. Průběh funkce $y = \sin x$ (plná) a funkce $y' = \cos x$ (tečkovaná)



Zdroj: program Graph

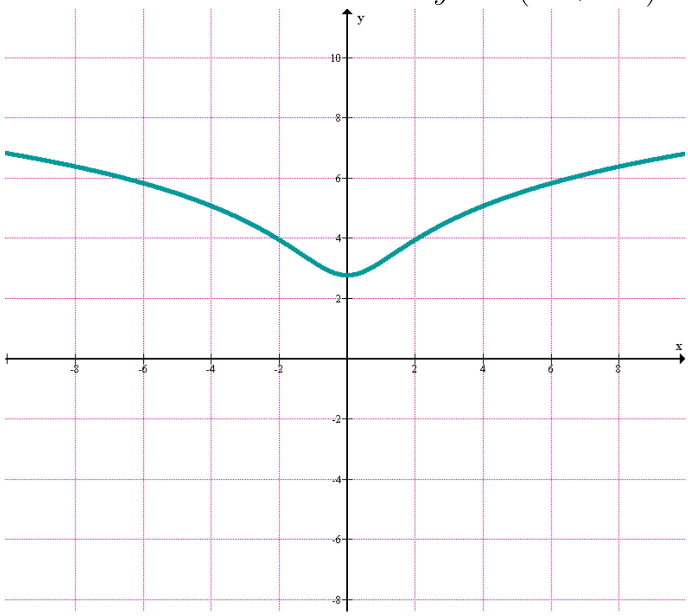
(7) Co se týče extrémů, tak v místech, kde je na funkci $y = \sin x$ (plné křivce) extrém (ať už se jedná o maximum či minimum) je funkční hodnota derivace, tedy funkce $y = \cos x$ (tečkovaná křivka) rovna nule (tedy leží přímo na ose x).

2. Monotonie a zakřivenost

(konvexita a konkávita)

(1) Dostaneme zadanou např. funkci $y = \ln(16 + 9x^2)$. Při výpočtu zakřivenosti funkce potřebujeme spočítat druhou derivaci, abychom z ní vyčetli chování funkce na daných intervalech podobně jako u výpočtu monotonií, kde pracujeme s první derivací. Nyní pro zadanou funkci zjistíme jak monotonii, tak zakřivenost. Z obrázku krásně vidíme, kde funkce roste a kde klesá. Zároveň vidíme, kde je konvexní a konkávní. Místům, kde se růst mění v pokles a naopak se říká extrémy, kde se mění konvexita v konkávitu a obráceně pak inflexní (*inflexe = ohyb*) body (za předpokladu, že v tomto bodě má graf funkce tečnu, což je v našich příkladech splněno).

Obrázek 4. Průběh funkce $y = \ln(16 + 9x^2)$



Zdroj: program Graph

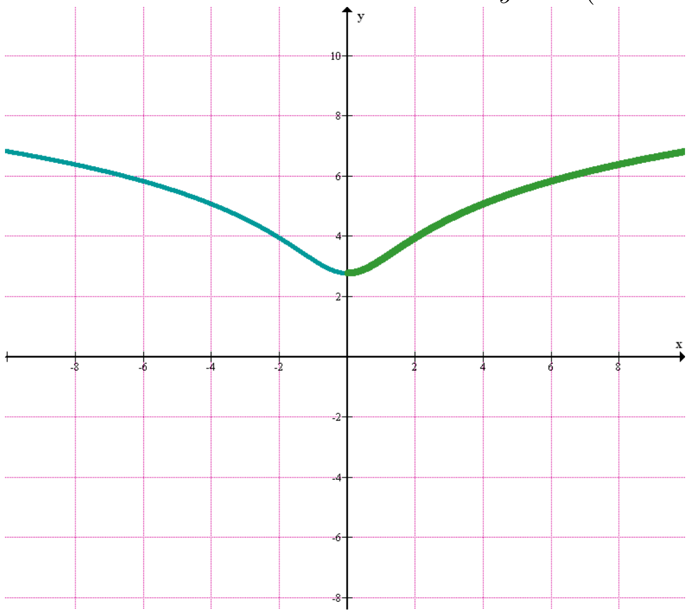
(2) Přestože nás zajímá více konvexita a konkávita, prohlédneme si tuto funkci i z pohledu monotonie. Opět tu je zvýrazněná část rostoucí (klidně by to mohla být část klesající). Nyní čekáme, že derivace této funce, bude v místech růstu zadané funkce nad osou x. Je tomu skutečně tak?

(3) Derivace funkce $y = \ln(16 + 9x^2)$ je funkce $y = \dfrac{18x}{16 + 9x^2}$. Pokud si tuto funkci nakreslíme, zjistíme, že její průběh je následující (viz Obrázek 6 – tečkovaná křivka):

Skutečně je v místech růstu první funkce nad osou x a tu protíná právě v místě, kde má funkce $y = \ln(16 + 9x^2)$ extrém.

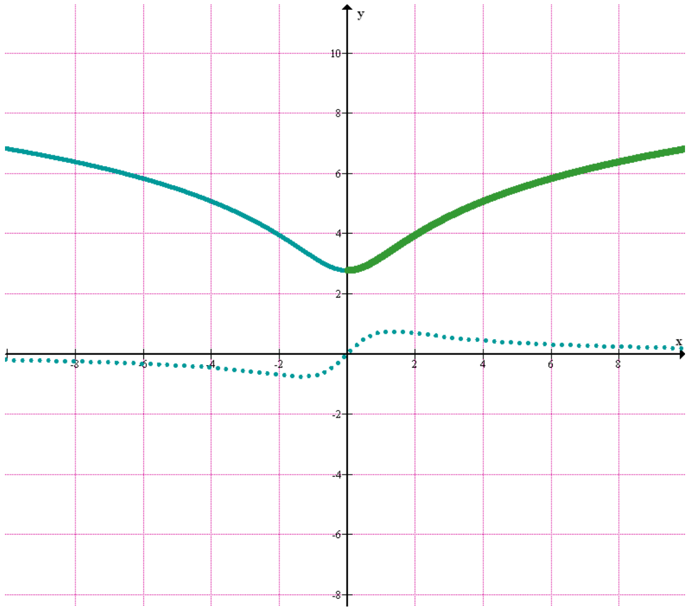
(4) Podíváme se na tu samou funkci z pohledu konvexity a konkávity. Na obrázku je zvýrazněna konvexní část křivky. Body, kde se průběh mění jsou tzv. inflexní (zároveň v nich má daná funkce tečnu, tedy vlastní derivaci). Zatímco má křivka $y = \ln(16+9x^2)$ jen jeden extrém, má dva inflexní body (extrém a inflexní bod nikdy nemohou být ve stejném místě).

Obrázek 5. Rostoucí interval funkce $y = \ln(16 + 9x^2)$



Zdroj: program Graph

Obrázek 6. Průběh funkce $y = \ln(16 + 9x^2)$ (plná) a funkce $y' = \dfrac{18x}{16 + 9x^2}$ (tečkovaná)

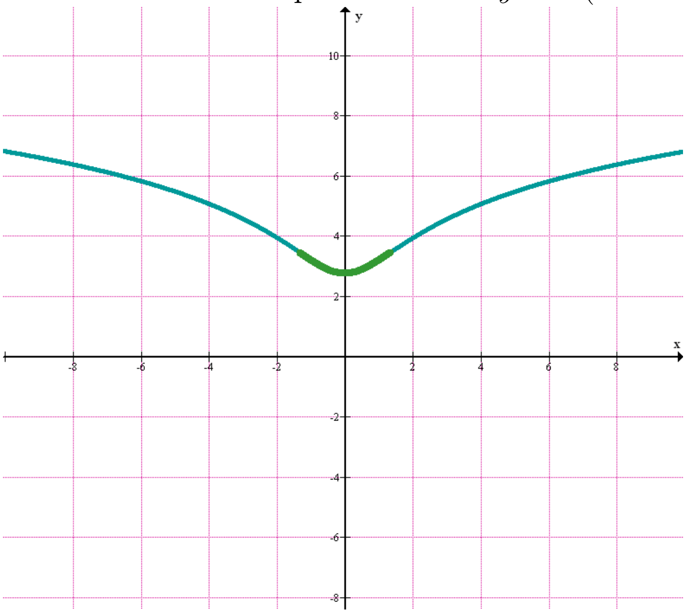


Zdroj: program Graph

(5) Nyní se podíváme, jak vypadá druhá derivace funkce $y = \ln(16+9x^2)$. Je to $y = \dfrac{18(16 - 9x^2)}{(16 + 9x^2)^2}$ a po nakreslení je průběh druhé derivace takový (viz Obrázek 8 – čárkovaná křivka):

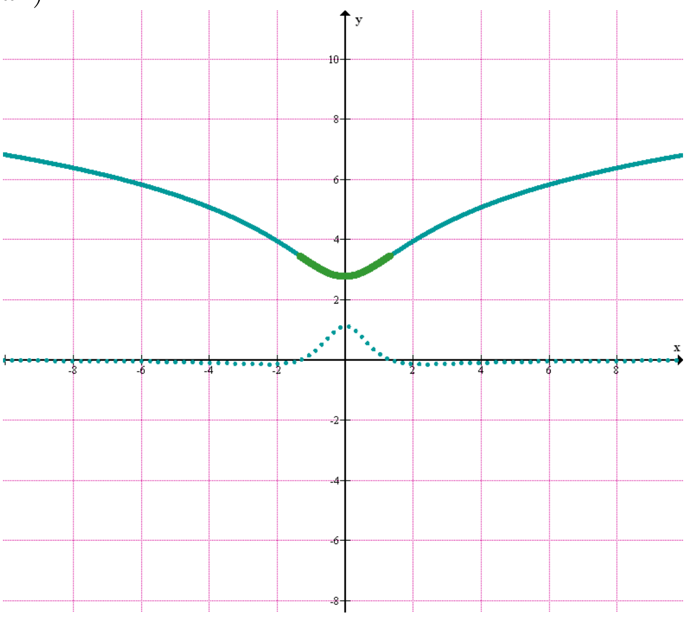
(6) V místech, kde je funkce konkávní jsou funkční hodnoty (y-psilonové souřadnice) druhé derivace záporné, intervaly konvexní mají druhou derivaci kladnou.

Obrázek 7. Konvexní průběh funkce $y = \ln(16 + 9x^2)$



Zdroj: program Graph

Obrázek 8. Průběh funkce $y = \ln(16 + 9x^2)$ (plná) a funkce $y'' = \dfrac{18(16 - 9x^2)}{(16 + 9x^2)^2}$ (čárkovaná)



Zdroj: program Graph

Tabulka 1. Jak čteme z derivací

Průběh funkce	Průběh druhé derivace	Znaménko druhé derivace	Tvar křivky
Konvexní	rostoucí	$+$	$\bigcup$
Konkávní	klesající	$-$	$\bigcap$